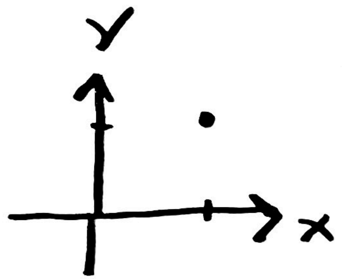
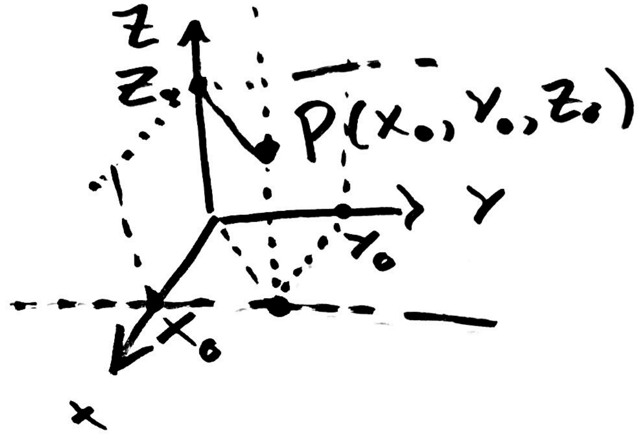
13 feb 23. 14.1-4 Vektorer i rommet

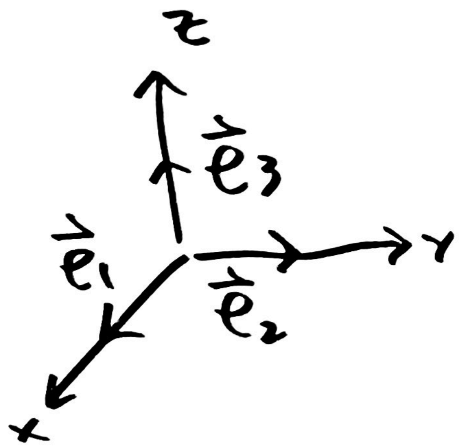




$\vec{OP} = [x, y, z]$

hvor $P(x, y, z)$

Vektorkoordinater



$\vec{e}_1 = [1, 0, 0]$

$\vec{e}_2 = [0, 1, 0]$

$\vec{e}_3 = [0, 0, 1]$

lengde 1

standard basisvektorer i rommet $\mathbb{R}^3$

$$[x, y, z] = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ er lineært uavhengige vektorer:

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

DVS. ingen av vektorene kan uttrykkes som en lineær kombinasjon av de andre.

Basis er lin uavhengige vektorer som utspenner hele vektorromet

Alle basiser for et vektorrom har samme antall vektorer

Dette antallet er dimensjonen til vektorrommet

Regning m vektorer:

$$k[x, y, z] = [kx, ky, kz]$$

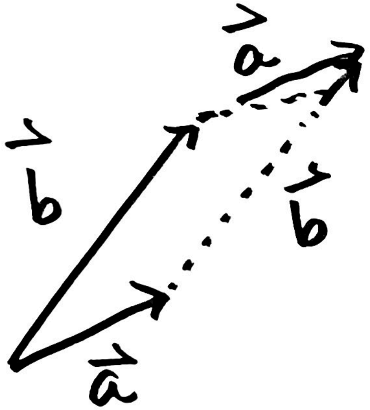
$$[x_1, y_1, z_1] + [x_2, y_2, z_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2]$$

$$2[-1, 2, 5] = [-2, 4, 10]$$

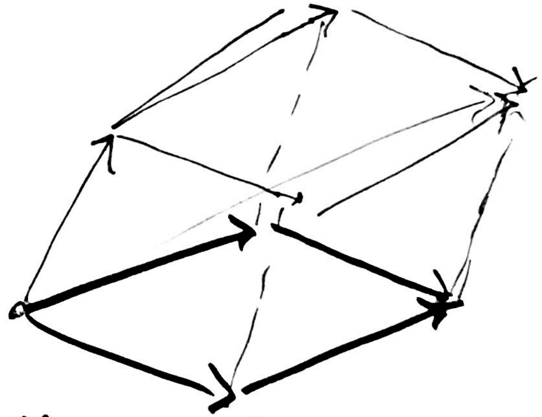
$$[1, 2, 3] + [2, -2, 7] = [3, 0, 10].$$

$A(1,4,2)$ $\qquad$ $B(-1,3,3)$

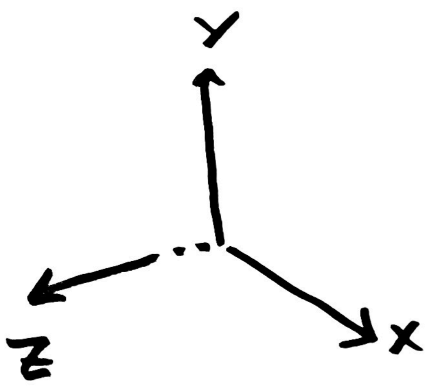
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$
$$= [-1,3,3] - [1,4,2]$$
$$= \underline{[-2,-1,1]}$$



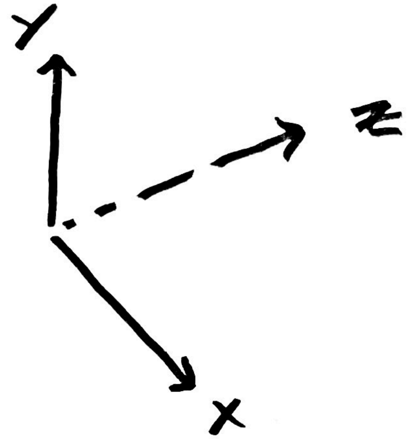
parallelogram



parallelepiped



speglbilder av hverandre

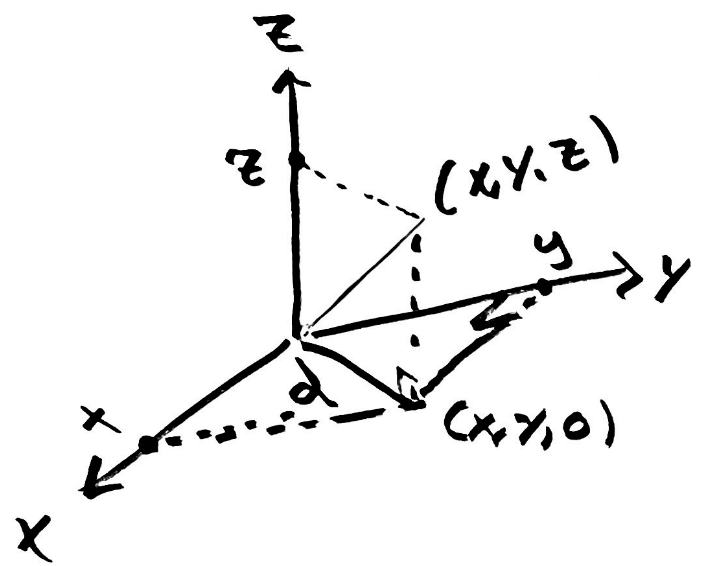


høyrehandsysten
x, y, z

Venstehandsystem
x, y, z.

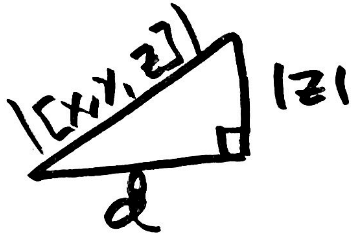
Lenden til $[x, y, z]$ er $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

avstanden fra O til $P(x, y, z)$ i det Euklidske koordinatsystemet



Pythagoras

1. $d^2 = x^2 + y^2$

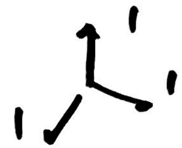
2. 

$$|[x, y, z]| = d^2 + |z|^2$$
$$= \underline{(x^2 + y^2) + z^2}$$
✓

$$|[-2, 2, 1]| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = \underline{3}$$

$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$= [1,1]$



Lengden til diagonalen i en kube med sider av lengde 1 er

$|[1,1,1]| = \sqrt{1+1+1} = \underline{\sqrt{3}}.$

—

Er $\vec{c} = [2,4,3]$ en linear kombinasjon $\vec{a} = [1,-1,2]$, $\vec{b} = [3,3,5]$?

$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \qquad s,t \in \mathbb{R}$

$[2,4,3] = [s+3t, -s+3t, 2s+5t]$

$$\left.\begin{aligned} s+3t &= 2 \\ -s+3t &= 4 \\ 2s+5t &= 3 \end{aligned}\right\} \qquad 6t = 2+4 = 6$$

$\underline{t = 1}$

$-s + 3 \cdot 1 = 4$ så $s = -1$

sjekker om 3. likning er oppfylt.

$2s + 5t = 2(-1) + 5 \cdot 1 = 3$ ✓

Ja. $-\vec{a} + \vec{b} = -[1,-1,2] + [3,3,5]$

$= \vec{c} = [2,4,3]$

— $\vec{u}, \vec{v}$ er parallelle $\Leftrightarrow$ $\vec{u} = s\vec{v}$ eller $\vec{v} = s\vec{u}$ for en skalar s.

Eks $\vec{a} = [2,4,-8]$ og $\vec{b} = [-5,-10,20]$

er parallelle vektorer.

$\vec{a} = 2[1,2,-4]$ og $\underline{\vec{b} = \frac{-5}{2}\vec{a}}$

Er $\vec{a} = [2,1,4]$ $\vec{b} = [3,4,-4]$ og $\vec{c} = [-1,-2,4]$

lineært uavhengige?

$\vec{a}+\vec{b} = [5,5,0] = 5[1,1,0]$

$\vec{a}-\vec{c} = [3,3,0] = 3[1,1,0]$

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = [0,-1,4]$

$$[1,1,0] = \frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{c}) \quad | \cdot 15$$

$$3(\vec{a}+\vec{b}) = 5(\vec{a}-\vec{c})$$

så $\underline{2\vec{a} - 3\vec{b} - 5\vec{c} = 0}$

Vektorene er lineært avhengige.

opg. er $\vec{a} = [1, 2, 0]$ $\vec{b} = [2,0,1]$ og $\vec{c} = [1,1,1]$
lineært uavhengige?

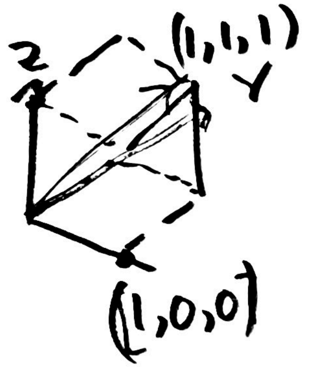
$\vec{b} - \vec{c} = [1,-1,0]$ $\vec{a} + 2(\vec{b}-\vec{c}) = 3[1,0,0] = 3\vec{e}_1$

$\vec{a} - \vec{e}_1 = 2\vec{e}_2$ $\vec{b} - 2\vec{e}_1 = \vec{e}_3$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ er lineære kombinasjoner av $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$
så $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ utspenner $\mathbb{R}^3$ og er derfor
lineært uavhengige.

14.4 skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(\theta)$
bilineært produkt.

$[x_1, y_1, z_1] \cdot [x_2, y_2, z_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$



Hva er vinkelen v mellom

$[1,0,0]$ og $[1,1,1]$ "diagonal i kuben"

$$[1,0,0]\bullet[1,1,1] = |[1,0,0]|\cdot|[1,1,1]|\cdot\cos v$$
$$1+0+0 = 1\cdot\sqrt{1+1+1}\,\cos v$$
$$\cos v = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
$$v = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \sim \underline{54.74^\circ}$$

eks når er $[s,1,2+s]$ og $[1,-2,3]$ ortogonale?

$$[s,1,2+s]\bullet[1,-2,3] = s\cdot 1 + 1\cdot(-2) + (2+s)\cdot 3$$
$$= s - 2 + 6 + 3s = \underline{4s+4 = 0}$$

$s=-1$

$\underline{[-1,1,1]}$

Opg 14.23 og 24

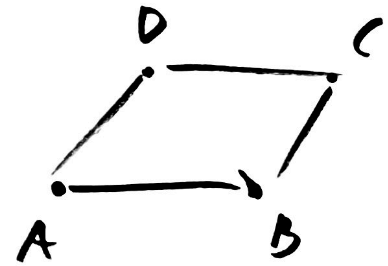
14.35 og 36 ...

14.36

$A = O \quad B(3,0.0) \qquad D(1,4,0)$

$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD} = [4,4.0] \qquad E(1.1.4)$

$C(4,4,0)$



a)