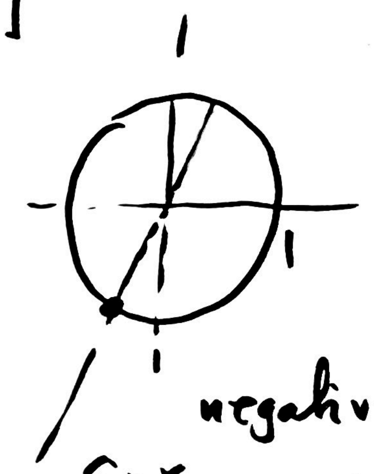
16.01.23

Fausk

$\tan x = 3$ $\qquad x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

Finn $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$ eksakt.



$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = 3$

negative

$\sin x$, $\cos x$ < 0

$\sin x = 3 \cdot \cos x$

kvadrerer: $\sin^2 x = 9\cos^2 x$ $\qquad$ Pytagoras: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$1 - \cos^2 x$

så $1 = 10\cos^2 x$ $\qquad$ så $\cos^2 x = \frac{1}{10}$

$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

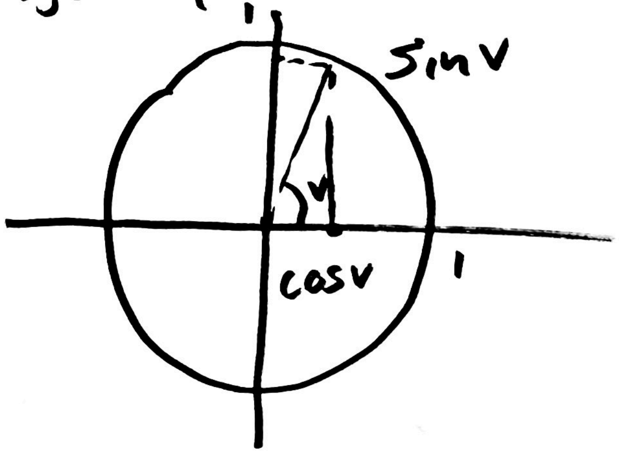
$x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ så $\underline{\cos x = \frac{-1}{\sqrt{10}}}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \ldots\right)$

$\sin x = \tan x \cdot \cos x = 3 \cdot \frac{-1}{\sqrt{10}} = \underline{\frac{-3}{\sqrt{10}}}$

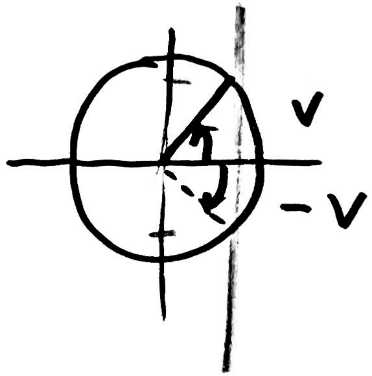
$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x = \frac{2 \cdot (-3)(-1)}{(\sqrt{10})^2} = \underline{\frac{3}{5}}$

Relasjoner mellom sin og cos.

Egenskaper til



Refleksjon om x-aksen:

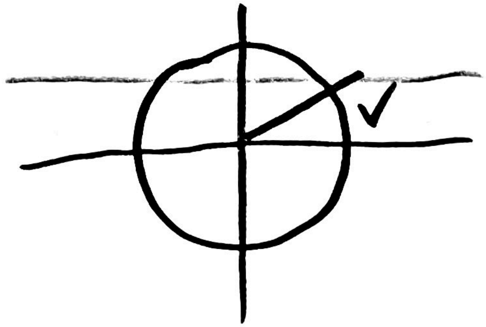


$$\cos(-v) = \cos(v)$$

$$\sin(-v) = -\sin(v)$$

$$\tan(-v) = -\tan(v)$$

Refleksjon om y-aksen



$$\sin(\pi - v) = \sin(v)$$

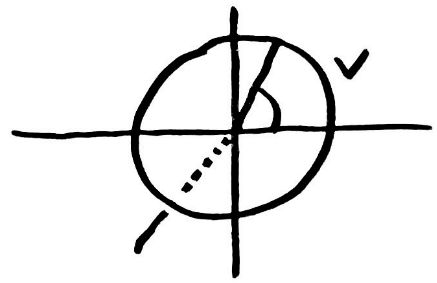
$$\cos(\pi - v) = -\cos(v)$$

$$\tan(\pi - v) = -\tan(v)$$

v sendes til $\pi - v$

Refleksjon om origo

(kombinasjon av rotasjon om både x- og y-aksen)

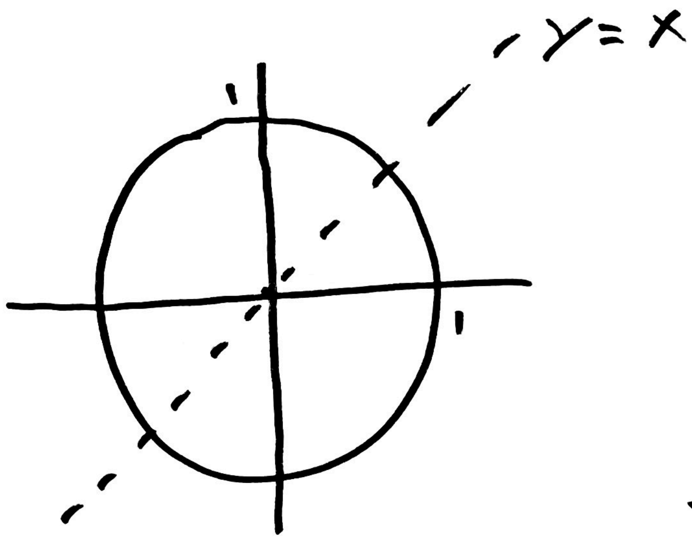


v sendes til $v+\pi$

$$\cos(v+\pi) = -\cos(v)$$
$$\sin(v+\pi) = -\sin(v)$$
$$\tan(v+\pi) = \tan(v)$$

Refleksjon om linjen $y=x$

x og y koordinatene byttes.

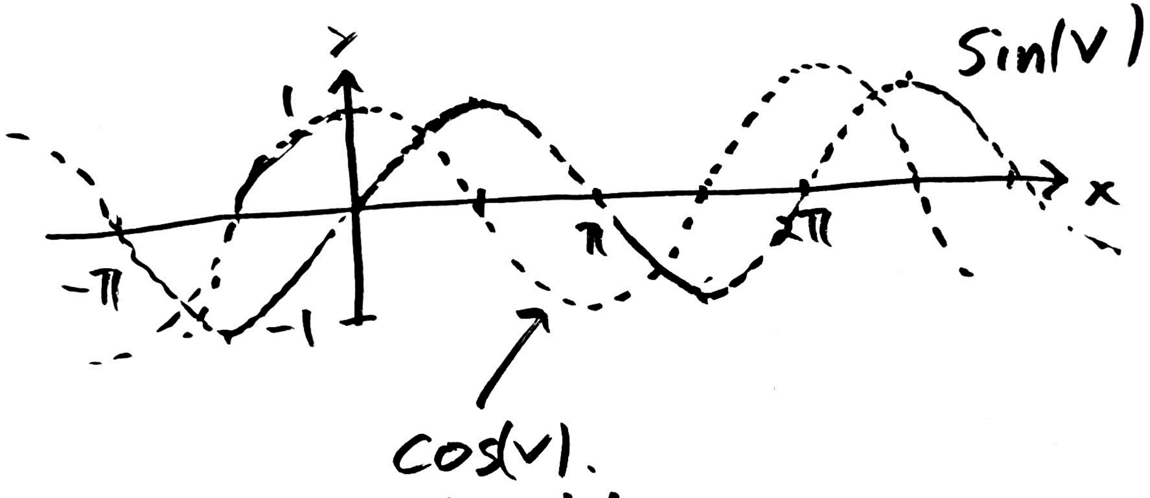


v sendes til $\frac{\pi}{2}-v$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-v\right) = \sin(v)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-v\right) = \cos(v)$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-v\right) = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{\tan v} \quad (= \cot(v))$$

$\tan(v)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}-v\right) = 1.$ når begge er definert

11.1 Sinus, cosinus funksjonene.



$\sin\left(\frac{\pi}{2}+v\right)$
$= \cos(-v) = \cos(v)$

Grafen til cos v
er grafen til sin v forflyttet $\pi/2$ mot venstre.

$\cos(-x) = \cos(x)$ jevn funksjon, grafen speglar seg om y-aksen

$\sin(-x) = -\sin(x)$ odde funksjon, grafen speglar seg om origo

$f(-x) = f(x)$: jevn funksjon.

x^{2n} er jevne funksjone $\quad n \in \mathbb{Z}$

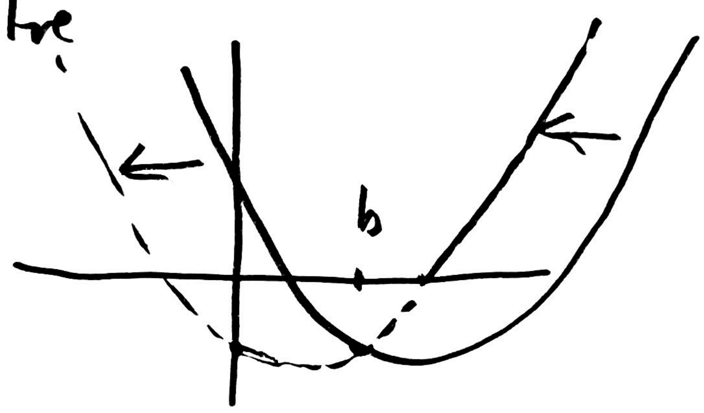
$f(-x) = -f(x)$: odde funksjon

x^{2n+1} er odde funksjone $\quad n \in \mathbb{Z}$.

(def. mengde symmetrisk om 0
$x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$)

x nullpunkt $f(x)=0 \Leftrightarrow -x$ nullpunkt
når f er jevn eller odde funksjon.

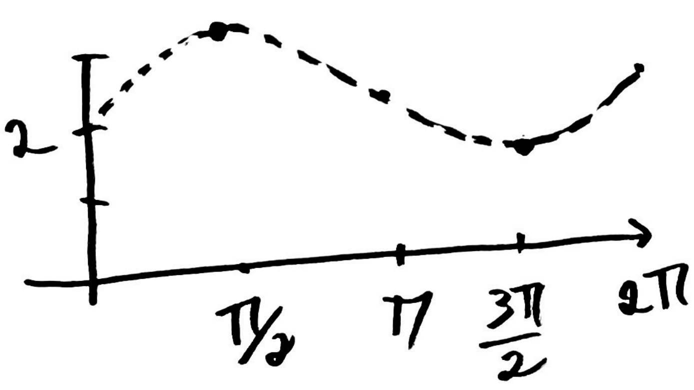
Grafen til $f(x+b)$ er grafen til $f(x)$ forskyvd med b mot venstre



$x \in [0, 2\pi]$

$f(x) = \sin x + 2$

Finn nullpunkt, topp- og bunnpunkt.



ingen nullpunkt.

toppunkt $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$

bunnpunkt $\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$

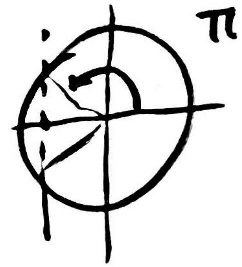
$f(x) = 2\cos x + \sqrt{3}$ $\quad x \in [0, 2\pi]$.

Finn: Topp- og bunnpunkt samt nullpunkt.

$f(x) = 0$ nullpunkt

$2\cos x + \sqrt{3} = 0 \iff \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

$\pi - \pi/6$



$\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$

Nullpunkt i $\underline{x = \frac{5\pi}{6}}$ og $\underline{x = \frac{7\pi}{6}}$

toppunkt hvor $\cos x = 1$ (størst) $\quad x = 0$ og 2π

Toppunkt $\underline{(0, 2+\sqrt{3}), \ (2\pi, 2+\sqrt{3})}$

bunnpunkt hvor $\cos x = -1$ (minst) $\quad x = \pi$

bunnpunkt $\underline{(\pi, \sqrt{3}-2)}$

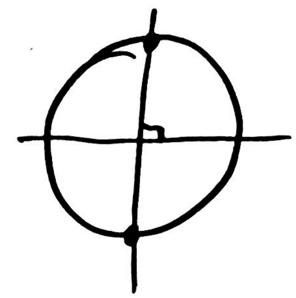
Øving: Regn 11.10 (11, 12) i boka

Legger ut noen oppg.

11.10 $f(x) = 3 + 2\sin x \qquad x \in [0, 2\pi]$

a) Nullpunkt: $f(x) = 0 \iff \sin x = -3/2 < -1$

ingen løsning.



b) Største verdi: Hvor $\sin x = 1$

$x = \pi/2$

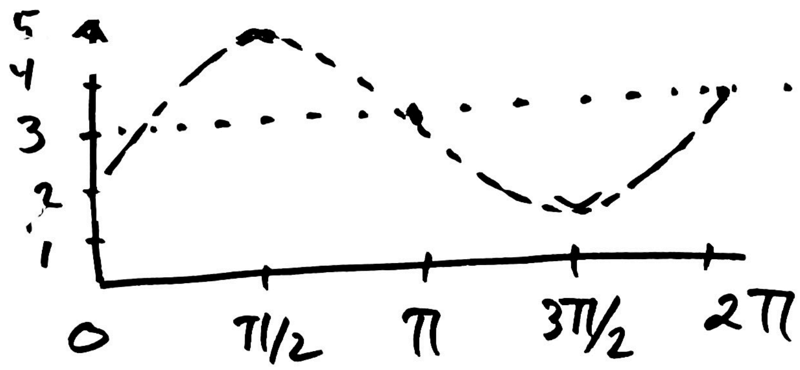
Toppunkt i $\left(\frac{\pi}{2}, 5\right)$

c) Minste verdi: Hvor $\sin x = -1$

$x = 3\pi/2$

Bunnpunkt i $\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$

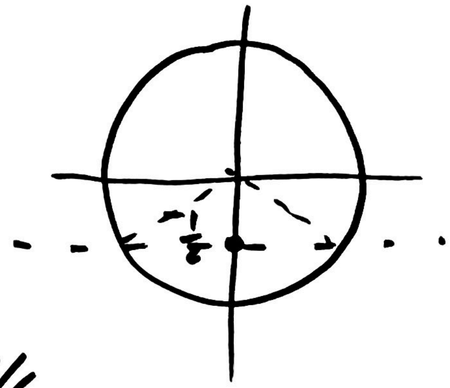
d) Skisse av graf



11.12 $f(x) = 1 + 2\sin(\pi x)$ $\quad x \in [0, 2]$

a) Nullpunkt: $f(x) = 1 + 2\sin(\pi x) = 0$

$\sin(\pi x) = -1/2$



$\pi x = v$ $\quad \arcsin(-1/2) = -\pi/6$

andre løsning: $\pi - (-\pi/6) = 7\pi/6$.

$\pi x = v = \frac{-\pi}{6} + 2\pi \cdot n$

$= \frac{7\pi}{6} + 2\pi \cdot n$

deler med π

$x = \frac{-1}{6} + 2 \cdot n$ og $x = \frac{7}{6} + 2 \cdot n$

i $[0.2]$ er løsningene

$\underline{x = \frac{11}{6}}$ og $\underline{x = \frac{7}{6}}$

b) Største verdi: $\sin(\pi x) = 1$ $\pi x = \frac{\pi}{2}$ deler med π

$\underline{x = \frac{1}{2}}$

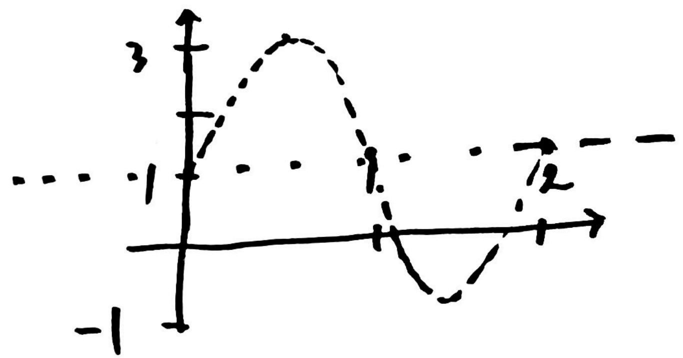
$\underline{\text{Toppunkt i } (\tfrac{1}{2}, 3)}$

c) Minste verdi $\sin(\pi x) = -1$ $\pi x = \frac{3\pi}{2}$ deler med π

$\underline{x = 3/2}$

$\underline{\text{Bunnpunkt } (\tfrac{3}{2}, -1)}$

d)



(også toppunkt i endepunktet [2,0]
bunnpunkt i [0,0])

Oppgaver: 1. Gitt $\sin x = \frac{1}{4}$ $\quad x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

Finn $\cos x$, $\tan x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$.

2. $f(x) = \sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x)$ $\quad x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

Finn nullpunktene til $f(x)$.

3. $g(x) = 2\sin^2 x - 1$ $\quad x \in [0, 2\pi]$

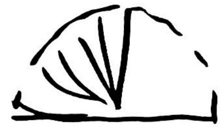
Finn nullpunktene og ekstremalpunktene.

1 $\sin x = \frac{1}{4}$

Pyt: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$

$\cos x = \pm\sqrt{\frac{15}{16}} = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}.$



$\cos v \leq 0$

$\cos(x) = \frac{-\sqrt{15}}{4}.$

$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1/4}{-\sqrt{15}/4} = \frac{-1}{\sqrt{15}}$

$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{(-\sqrt{15})}{4} = \underline{\frac{-\sqrt{15}}{8}}$

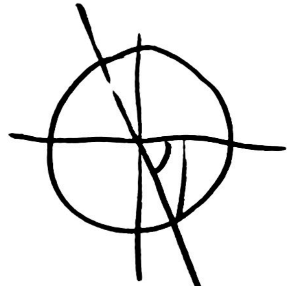
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{15}{16} - \frac{1}{16} = \frac{14}{16} = \underline{\frac{7}{8}}$

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \quad \sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0$

$\cos(2x) \neq 0$ deler med denne, : $\tan(2x) + \sqrt{3} = 0$

$\tan(V) = -\sqrt{3}$ $\qquad V = 2x$

$V \in [\pi, 2\pi]$



$V = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi \cdot n$

$-\pi/3 + \pi \cdot n$

Én løsning i $[\pi, 2\pi]$: $\frac{-\pi}{3} + 2\pi = \frac{6\pi - \pi}{3} = 5\pi/3$.

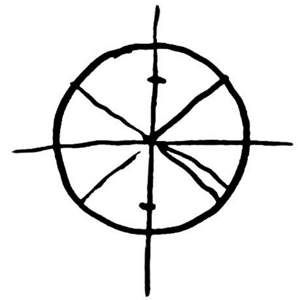
$2x = V = 5\pi/3$ deler m. 2 $\qquad \underline{x = 5\pi/6}$

Nullpunktet er $\underline{x = 5\pi/6}$

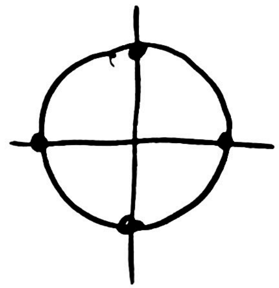
3. Nullpunkt $g(x) = 0 \quad = 2\sin^2 x - 1$

$$\sin^2 x = 1/2$$

$$\sin x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Nullpunktene er $\underline{x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}}$



$g(x)$ minst når $\sin^2 x = 0$

$x = 0, \pi$ og 2π

bunnpunkt i $\underline{(0,-1), (\pi,-1), (2\pi,-1)}$

toppunkt: $\sin^2 x$ størst mulig ; $\sin^2 x = 1$

$\sin x = 1 \qquad x = \pi/2$

$\sin x = -1 \qquad x = 3\pi/2$

toppunkt i $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ og $\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$