Løsningsforslag eksamen matematikk forkurs 03.06.2026

Oppgave 1

a) $(x-2)^2 - (x+2)(3-2x) = (x^2 - 4x + 4) - (3x - 2x^2 + 6 - 4x)$

$= x^2 - 4x + 4 - 3x + 2x^2 - 6 + 4x = \underline{\underline{3x^2 - 3x - 2}}$

b) $\frac{x}{x-3} + \frac{2}{x} - 1 = \frac{x \cdot x}{(x-3)x} + \frac{2(x-3)}{x(x-3)} - \frac{x(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x^2+(2x-6)-(x^2-3x)}{x(x-3)}$

$$= \frac{x^2 + 2x - 6 - x^2 + 3x}{x(x-3)} = \underline{\underline{\frac{5x-6}{x(x-3)}}} = \underline{\underline{\frac{5x-6}{x^2-3x}}}$$

c) Faktoriserer $x^2 - 6x + 9$:

Finner nullpunkter:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$$

Dobbelt nullpunkt

$$x^2 - 6x + 9 = 1 \cdot (x-3)(x-3) = (x-3)^2$$

Funksjonsuttrykket kan dermed skrives som $f(x) = \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$. Siden uttrykket under kvadratrottegnet i telleren aldri er negativt, er det ingen ulovlige x-verdier i telleren. Dermed er det kun $x = 3$ i nevneren som gir ulovlig verdi for $f(x)$.

$$\underline{\underline{D_f = \mathbb{R} \backslash \{3\}}}$$

$$\underline{\underline{f(x)}} = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x-3} = \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \underline{\underline{\frac{|x-3|}{x-3}}}$$

Alternativ skrivemåte:

$$\underline{\underline{f(x) = \begin{cases} 1, x > 3 \\ -1, x < 3 \end{cases}}}$$

Oppgave 2

a) $2\cos x - \sqrt{3} = 0 \qquad x \in [0, \pi]$

$2\cos x = \sqrt{3}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) + k2\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \qquad \vee \qquad x = \frac{11\pi}{6} + k2\pi$

$k = 0$: $x = \frac{\pi}{6} \qquad \vee \qquad x = \frac{11\pi}{6}$, ikke med i $[0, \pi]$

Alle andre verdier for k gir x-verdi utenfor $[0, \pi]$

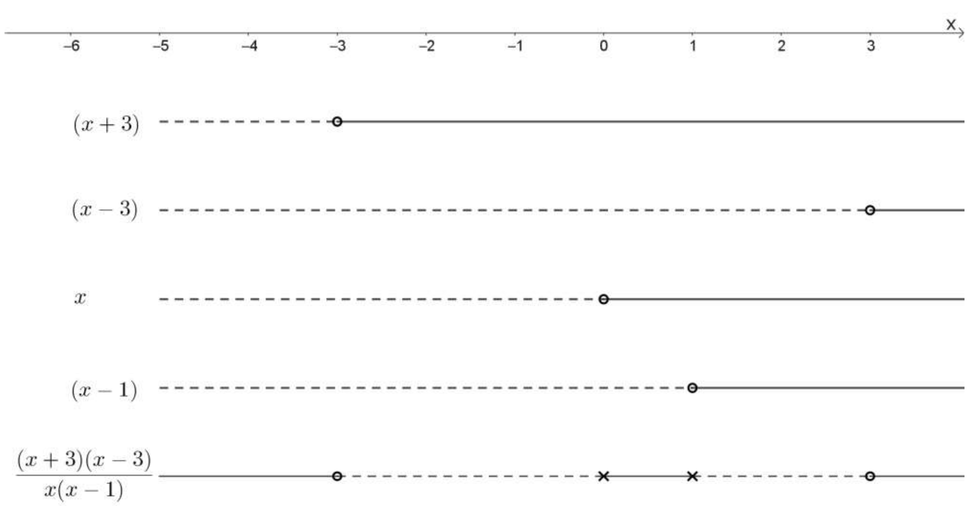
$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{6}}}$$

b)

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - x} \leq 0$$

$$\frac{(x+3)(x-3)}{x^2 - x} \leq 0$$

$$\frac{(x+3)(x-3)}{x(x-1)} \leq 0$$



$$\underline{\underline{x \in [-3, 0\rangle \cup \langle 1, 3]}}$$

c)

$$2\lg(3x+1) = \lg x^2$$

$$\lg(3x+1)^2 = \lg x^2$$

$$(3x+1)^2 = x^2$$

$$9x^2 + 6x + 1 = x^2$$

$$9x^2 + 6x + 1 - x^2 = 0$$

$$8x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1}}{2 \cdot 8} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{16} = \frac{-6 \pm 2}{16}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{4}$$

Tester for mulig negativ verdi i lg-uttrykket på venstre side av likhetstegnet i opprinnelig ligning:

$x = -\frac{1}{2}$: $3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{2}$ Negativ verdi; ikke gyldig løsning

$x = -\frac{1}{4}$: $3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{1}{4}$ Positiv verdi; gyldig løsning

$$\underline{\underline{x = -\frac{1}{4}}}$$

NB! Hvis man gjør om høyre side fra lnx^2 til $2lnx$, mister man den gyldige løsningen.

Oppgave 3

a) $f(x) = e^x, \;\; g(x) = e^{4x}$

Momentan vekstfart finnes med den deriverte:

$f'(x) = e^x$ $\qquad$ $g'(x) = 4e^{4x}$

Momentan vekstfart er lik når

$$f'(x) = g'(x)$$

$$e^x = 4e^{4x}$$

$$\frac{e^x}{e^{4x}} = 4$$

$$e^{x-4x} = 4$$

$$e^{-3x} = 4$$

$$-3x = ln4$$

$$\underline{\underline{x = -\frac{1}{3}ln4}}$$

$$\underline{\underline{a = -\frac{1}{3} \qquad b = 4 \qquad når\ x = a\ lnb}}$$

Alternativt svar: $\underline{\underline{x = \frac{1}{3}\ln\frac{1}{4}}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{a = \frac{1}{3} \quad b = \frac{1}{4}}}$

b) Deriverer med produktregelen:

$$g'(x) = 1 \cdot \sin 2x + x \cdot 2\cos 2x = \sin 2x + 2x\cos 2x$$

Dermed er tangentens stigningstall

$$a = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\pi + \pi \cdot \cos\pi = 0 + \pi \cdot (-1) = -\pi$$

Funksjonsverdien er

$$y = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \sin\pi = \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0$$

$y = ax + b$ gir dermed

$$0 = -\pi \cdot \frac{\pi}{2} + b$$

$$b = \frac{\pi^2}{2}$$

$\underline{\underline{\text{Tangenten er } y = -\pi x + \frac{\pi^2}{2}}}$

c) Arealet består av en halvsirkel med radius $\frac{x}{2}$ og et rektangel med areal $x(4-x)$.

Totalt får vi

$$A(x) = x(4-x) + \frac{1}{2} \cdot \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$$
$$= 4x - x^2 + \frac{\pi x^2}{8}$$

Deriverer:

$$A'(x) = 4 - 2x + \frac{\pi x}{4}$$

$A'(x) = 0$ gir

$$x\left(2-\frac{\pi}{4}\right)=4$$
$$x(8-\pi)=16$$
$$\underline{\underline{x=\frac{16}{8-\pi}}}\approx 3{,}3$$

Ved å derivere en gang til kan vi vise at dette gir et toppunkt for grafen til $A(x)$:

$$A''(x)=-2+\frac{\pi}{4}\approx -1{,}2$$

Vi har dermed $A''(x)<0$ for alle x, så grafen vender hul side ned og det stasjonære punktet er et toppunkt.

Oppgave 4

a)

Delbrøkoppspalting:

$$\frac{3x-3}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$
$$3x-3=A(x+1)+B(x-2)$$

$x=2$: $\quad 3=3A \;\Rightarrow\; A=1$

$x=-1$: $\quad -6=-3B \;\Rightarrow\; B=2$

$$\int\frac{3x}{x^2-x-2}\,dx=\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$\underline{\underline{=\ln|x-2|+2\ln|x+1|+C}}$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin x\cdot dx$ $\qquad v=x \qquad v'=1$

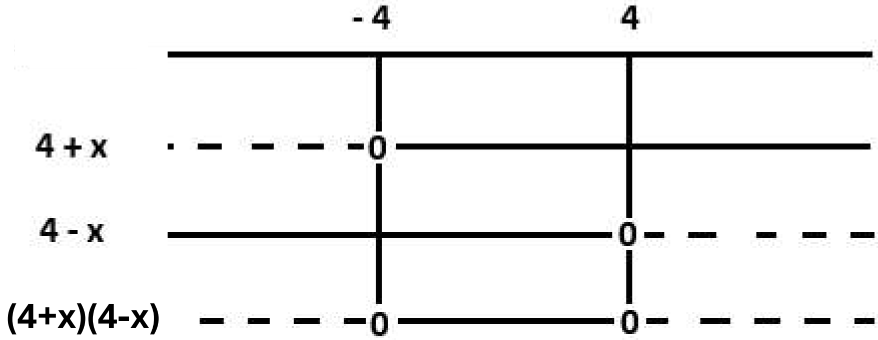
$\qquad u=-\cos x \qquad u'=\sin x$

$$=[x(-cosx)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\cdot(-\cos x)\cdot dx=[x(-cosx)]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot dx$$

$$=[x(-cosx)]_0^{\frac{\pi}{2}}+[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=[-xcos\,x+\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)-(0\cdot cos\,0+sin0)=0+1-0-0\;\underline{\underline{=1}}$$

c) Fortegnskjema for uttrykket under kvadratrottegnet:



Kun positive verdier er tillatt under kvadratrottegnet.

$D_f = [-4, 4]$

$$V = \pi \int_{-4}^{4} \sqrt{(4+x)(4-x)}^{2}\,dx = \pi \int_{-4}^{4} (4+x)(4-x)dx = \pi \int_{-4}^{4} (16 - x^2)dx$$

$$= \pi \left[16x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-4}^{4} = \pi \left(16 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \left(16(-4) - \frac{1}{3} \cdot (-4)^3\right)\right)$$

$$= \pi \left(64 - \frac{64}{3} + 64 - \frac{64}{3}\right) = \pi \left(\frac{192}{3} - \frac{64}{3} + \frac{192}{3} - \frac{64}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{256\pi}{3}}}$$

Oppgave 5

$f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x+2}$

a) $f(0) = \frac{0+0-4}{0+2} = -2$ $\underline{\underline{\mathit{Skjæringspunkt\ med\ y-aksen}: (0,-2)}}$

$f(x) = 0$ gir $x^2 + 3x - 4 = 0$

$$(x+4)(x-1) = 0$$

<u>Skjæringspunkt med x-aksen: $(-4{,}0)$ og $(1{,}0)$</u>

(Nullpunkter $x = -4$ og $x = 1$)

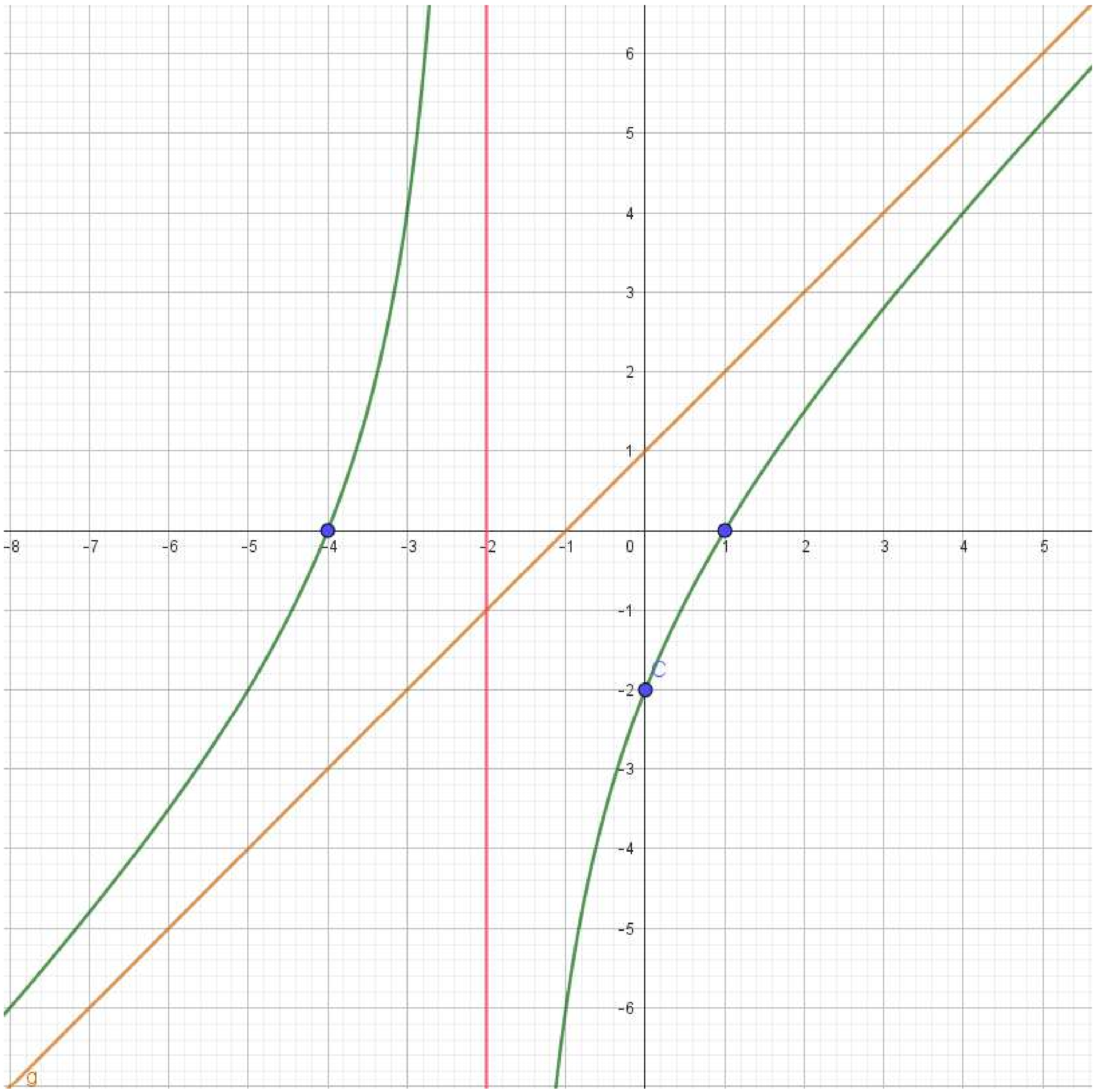
b) Vertikal asymptote:

$x \to -2 \Rightarrow |f(x)| \to \infty$

Altså er $x = -2$ en vertikal asympote.

Horisontal/skrå asymptote:
Teller er én grad høyere enn nevner, så vi har skrå asymptote.

Polynomdivison gir $f(x) = x + 1 - \frac{6}{x+2}$
Altså er skrå asymptote $\underline{\underline{y = x + 1}}$



Oppgave 6

a) $2x + x = 180°$

$3x = 180°$

$x = \frac{180°}{3} = 60°$

$2y + y + x = 180°$

$3y + 60° = 180°$

$3y = 180° - 60°$

$3y = 120°$

$y = \frac{120°}{3} = 40°$

$$\underline{\underline{\angle A = y = 40° \qquad \angle B = x = 60° \qquad \angle C = 2y = 80°}}$$

b) $\frac{AC}{\sin 60°} = \frac{2}{\sin 80°}$

$AC = \frac{2 \cdot \sin 60°}{\sin 80°} \underline{\underline{\approx 1.76}}$

$Arealet = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1.76 \cdot \sin 40° \underline{\underline{\approx 1.13}}$

Oppgave 7

a)
$$\underline{\underline{T(t) = 16 - 8\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)}}$$

Maksimumstemperatur: Når $\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) = -1$

$$T_{max} = \big(16 - 8 \cdot (-1)\big)°C = \underline{\underline{24°C}}$$

Minimumstemperatur: Når $\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) = 1$

$$T_{min} = (16 - 8 \cdot 1)°C = \underline{\underline{8°C}}$$

b) Ved å løse likningen:

$$16 - 8\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) = 20$$

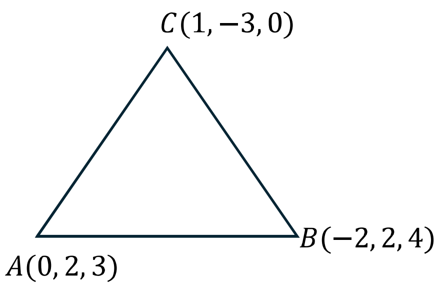
$$\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi t}{12} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad \vee \quad \frac{\pi t}{12} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$$

$$t = 8 + 24n \quad \vee \quad t = 16 + 24n$$

ser vi at temperaturen passerer $20°C$ første gang kl 8:00. Dermed vil while-løkken kjøres 9 ganger (kl 0:00, 1:00, ... , 8:00).

Oppgave 8



a) $\overrightarrow{AB} = [-2 - 0, 2 - 2, 4 - 3] = \underline{\underline{[-2, 0, 1]}}$

$\overrightarrow{AC} = [1 - 0, -3 - 2, 0 - 3] = [1, -5, -3]$

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &= 2[-2, 0, 1] + [1, -5, -3] = [-4, 0, 2] + [1, -5, -3] \\ &= [-4 + 1, 0 - 5, 2 - 3] = \underline{\underline{[-3, -5, -1]}} \end{aligned}$$

b)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_x} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_y} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_z}$$

$$= (0 - (-5))\overrightarrow{e_x} - (6 - 1)\overrightarrow{e_y} + (10 - 0)\overrightarrow{e_z} = \underline{\underline{[5, -5, \ 10]}}$$

Eventuelt en vektor som er parallell med denne, f.eks. $\underline{\underline{[1, -1, \ 2]}}$

c) En normalvektor til planet er $\vec{n} = [1, -1,\ \ 2]$ (Se b))

Bruker $A(0, 2, 3)$ som punkt (kan også bruke B eller C)

$1(x-0) - 1(y-2) + 2(z-3) = 0$

$x - y + 2 + 2z - 6 = 0$

$\underline{\underline{\beta: \quad x - y + 2z = 4}}$

d) Retningsvektorer til linja l er normalvektorer til β. Bruker vektoren fra b):

$\vec{r} = [1, -1, 2]$

Setter opp en parameterframstilling for linja l som gjør at den går gjennom $D(0, 0, -1)$:

$$l: \begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 0 - 1t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad l: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Både D og P skal ligge på l.

Setter inn parameterframstillingen i ligningen for planet β for å finne t-verdien som gir punktet P der linja l skjærer β.

$x - y + 2z = 4$

$t - (-t) + 2(-1 + 2t) = 4$

$t + t - 2 + 4t = 4$

$6t = 4 + 2$

$\underline{t = 1}$

Setter $t = 1$ inn i parameterframstillingen for l for å finne punktet P:

$x = 1$

$y = \ -1$

$z = -1 + 2 \cdot 1 = 1$

$\underline{\underline{P(1, -1, 1)}}$

Oppgave 9

a) Dette er en aritmetisk rekke med $d = -0{,}01$, hvis vi måler lengden i kilometer. Antall dager, 365, er antall ledd rekken skal inneholde.
Dermed har vi

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + (a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} \cdot n = \left(a_1 + \frac{d}{2}(n-1)\right) \cdot n$$
$$= a_1 n - \frac{0{,}01}{2}(n^2 - n) = a_1 n - \frac{n^2 - n}{200}$$

b) Med $s_{365} = 1748$ får vi

$$365a_1 - \frac{365^2 - 365}{200} = 1748$$

$$a_1 - \frac{182}{100} = \frac{1748}{365}$$

$$a_1 = 6{,}61$$

Mari må løpe 6,61 km den første dagen. De påfølgende dagene løper hun 6,60 km, 6,59 km, osv. For sikkerhets skyld kan vi sjekke at den siste etappen også blir en positiv lengde:

$$a_{365} = a_1 + 364 \cdot d = 6{,}61 - 3{,}64 = 2{,}97$$