

Prøve i                      Fork1120 Matematikk  
Dato:                        1. desember 2025  
Tid:                         kl 8:30 - 13:30  
Antall oppgaver:    10 (20 deloppgaver)  
Hjelpemiddel:        Formelsamling og kalkulator

## Løsningsforslag

**Oppgave 1.** Løs likningene og oppgi svarene eksakt

a)  $3x + 1 = 2(5x - 3)$

LF: Vi ganger ut parentesen og får  $3x + 1 = 10x - 6$ . Dette er ekvivalent til

$$10x - 3x = 1 + 6 \iff 7x = 7$$

Løsningen er  $x = 1$ .

b)  $1000 \cdot 10^x = \frac{1000^x}{100}$

LF: Dette er ekvivalent til en lineær likning i  $x$ : Vi kan for eksempel ta logaritmen på begge sider av likhetstegnet og får følgende ekvivalente likningen (siden log er en strengt voksende funksjon)

$$\log(1000) + \log(10^x) = \log(1000^x) - \log(100)$$

Siden  $1000 = 10^3$ ,  $100 = 10^2$  og  $10 = 10^1$  gir dette

$$3 + x = 3x - 2 \iff 2x = 5 \iff \underline{x = 5/2}$$

Alternativt: Vi kan benytte at  $1000^x = (10^3)^x = 10^{3x}$ , og får

$$1000 \cdot 100 = \frac{10^{3x}}{10^2} = 10^{3x-2} = 10^{2x}$$

Siden  $10^{2x} = 10^3 \cdot 10^2 = 10^5$  og eksponentfunksjonen med grunntall 10 er strengt voksende, så må  $2x = 5$ , og derfor  $x = 5/2$ .

c)  $|x - 3| = 2$

LF: Det er to muligheter her: Likningen  $|y| = 2$  har to løsninger: Løsningene er  $y = 2$  og  $y = -2$ . Derfor er likningen ekvivalent til at

$$x - 3 = 2 \quad \text{eller} \quad x - 3 = -2$$

Løsningene til likningen er derfor  $x = 5$  og  $x = 1$ .

d)  $x + 2\sqrt{x + 3} + 2 = 0$

LF: Denne irrasjonal likningen er ekvivalent til likningen

$$-2\sqrt{x + 3} = x + 2$$

Alle løsningene til denne likningen oppfyller også likningen vi får ved å kreve at kvadratet av høyresiden av likhetstegnet, skal være lik kvadratet av venstresiden av likhetstegnet. Dette er likningen

$$4(x + 3) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

Vi samler alle leddene på den ene siden av likhetstegnet.

$$x^2 + 4x - 4x + 4 - 12 = x^2 - 8 = 0$$

Løsningene til likningen vi får (etter kvadreringen) er derfor  $x = \pm 2\sqrt{2} \approx \pm 2.82$ .

Sjekker  $x = 2\sqrt{2}$ : Venstre siden er negativ og høyresiden er positiv. Dette er derfor en "falsk løsning".

Sjekker  $x = -2\sqrt{2}$ : Nå er både høyre og venstre side av likhetstegnet negative. Siden de er like etter kvadrering, er de derfor like. Venstre siden er lik  $-2\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$  som er lik høyresiden  $2(1 - \sqrt{2})$  (siden  $(2(1 - \sqrt{2}))^2 = 4(1 + 2 - 2\sqrt{2})$ ).

Løsningen til likning er derfor  $x = -2\sqrt{2}$ .

e)  $7^x + \frac{6}{7^x} = 5$

LF: Dette er ekvivalent til en annengradslikning i  $7^x$ .

$$(7^x)^2 - 5 \cdot 7^x + 6 = 0$$

Siden vi har faktoriseringen  $y^2 - 5y + 6 = (y - 3)(y - 2)$ , så er likningen ekvivalent til  $(7^x - 3)(7^x - 2) = 0$ . Løsningene får vi ved å sette hver av faktorene lik 0, og løse for  $x$ . Likningen  $7^x = 2$  er ekvivalent til  $\ln(7^x) = x \ln(7) = \ln(2)$ , siden  $\ln$  er en voksende funksjon. Derfor er  $x = \ln(2)/\ln(7)$ . Tilsvarende for  $7^x = 3$ .

Uttrykt ved bruk av naturlige logaritmer er løsningene

$$\underline{x = \frac{\ln(2)}{\ln(7)} \quad \text{og} \quad x = \frac{\ln(3)}{\ln(7)}}$$

Alternativt kan vi benytte en annen logaritme enn den naturlige. For eksempel ved bruk av 7-logaritmen er løsningene  $\ln_7(2)$  og  $\ln_7(3)$ .

**Oppgave 2.** Bestem lengdene til sidene i et rektangel med areal lik  $10 \text{ cm}^2$  og omkrets (summen av lengden til de fire sidene) lik  $20 \text{ cm}$ . Oppgi lengdene eksakt.

LF: Opplysningene gir oss (det ikke-lineære) likningsystemet

$$xy = 10 \quad \text{og} \quad 2(x + y) = 20$$

Vi har at  $x = 0$  ikke er en løsning. Gange vi den andre likningen (delt med 2) med  $x$  på begge sider av likhetstegnet og benytter den første likningen, da får vi derfor likningen

$$x^2 + 10 = 10x$$

(Dette er det samme som å bruke likning 1 til å uttrykke  $y$  ved hjelp av  $x$ , og så sette uttrykket for  $y$  inn i likning 2.) Ved fullføring av kvadratet får vi at dette er ekvivalent til

$$(x - 5)^2 = 15$$

Løsningene er derfor  $x - 5 = \pm\sqrt{15}$ . Dette gir oss at de to sidene må ha lengde

$$\underline{5 + \sqrt{15} \text{ cm} \quad \text{og} \quad 5 - \sqrt{15} \text{ cm}}$$

### Oppgave 3. Løs ulikhetene

a)  $|2x| - 1 > x$

LF: a) Når  $x \geq 0$  er ulikheten  $2x - 1 > x \iff x > 1$ .

Når  $x < 0$  er ulikheten  $-2x - 1 > x \iff -1 > 3x$ . Vi ganger ulikheten med det positive tallet  $1/3$  og får den ekvivalente ulikheten  $-1/3 > x$ . Løsningene er derfor alle  $x > 1$  når  $x$  er positiv, og  $x < -1/3$  når  $x$  er negativ.

$$\underline{x \in \langle -\infty, -1/3 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle}$$

b)  $2x + 7 < x \leq 25 + 3x$

LF: b) Her har vi en dobbel ulikhet. Vi må derfor finne felles løsninger til de to ulikhetene. Vi samler alle leddene med en faktor  $x$  på ene siden av ulikhetstegnet, for hver av de to ulikhetene:

$$x < -7 \quad \text{og} \quad -25 \geq 3x - x$$

Den andre ulikheten er ekvivalent til  $x \geq -25/2 = -12.5$ . Løsningene til den doble ulikheten, som er den felles løsningsmengden til de to ulikhetene, er derfor

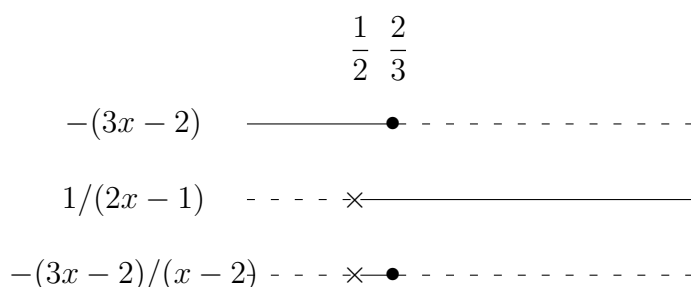
$$\langle -\infty, -7 \rangle \cap [-12.5, \infty) = \underline{[-12.5, -7]}$$

c)  $\frac{x}{2x-1} \leq 2$

LF: Vi flytter uttrykkene over på venstre side av ulikhetene, og finner en felles nevner

$$\frac{x}{2x-1} - \frac{2(2x-1)}{2x-1} = \frac{x-4x+2}{2x-1} = \frac{-(3x-2)}{2x-1} \leq 0$$

Her er fortegnsskjemaet



Vi leser av løsningene  $\langle -\infty, 1/2 \rangle \cup [2/3, \infty)$ .

**Oppgave 4.** Finn alle nullpunkter og asymptoter til de følgende rasjonale uttrykkene (på sine naturlige definisjonsmengder)

$$a) r(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x + 20} \quad \text{og} \quad b) s(x) = \frac{x^3 + 8}{2x^2 + 5x + 2}$$

LF: a) Telleren er ved konjugatsetningen lik  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ . Nevneren er ved fullføring av kvadratet lik  $(x - 1/2)^2 + 20 - 1/4 > 0$  for alle  $x$ . Funksjonen er derfor definert for alle  $x$ , og den har ingen vertikale asymptoter. Når  $x \rightarrow \infty$  går  $r(x)$  mot 1. Funksjonen  $r(x)$  har en horisontal asymptote som er  $y = 1$ . Nullpunktene til  $r(x)$  er  $x = -2$  og  $x = 2$ .

b) Vi "ser" at telleren til  $s(x)$  har et nullpunkt som er  $x = -2$ . Telleren er derfor delelig med  $x + 2$ . Vi utfører polynomdivisjonen

$$\begin{array}{r} (x^3 + 8) : (x + 2) = x^2 - 2x + 4 \\ -x^3 - 2x^2 \\ \hline -2x^2 + 4x \\ 2x^2 + 4x \\ \hline 4x + 8 \\ -4x - 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

Faktoren  $x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3$  er alltid positiv.

Nevneren faktoriseres som

$$2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)(x + 2)$$

Dette kan vi for eksempel se ved å observere at  $-2$  også her er en rot. Vi kan selvsagt også finne røttene til polynomet ved å bruke annengradsformelen. Det rasjonale uttrykket  $s(x)$  har derfor definisjonsmengde alle  $x$  ulik  $-1/2$  og  $-2$ . Uttrykket er på definisjonsmengden lik

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{2x + 1}$$

Det rasjonale uttrykket  $s(x)$  har derfor ingen nullpunkt og en vertikal asymptote i  $x = -1/2$ . Siden graden til telleren er én mer enn graden til nevneren, så har det rasjonale uttrykket en skrå asymptote. Vi finner denne ved å utføre polynomdivisjonen (med de forkorta uttrykkene)

$$\begin{array}{r} (x^2 - 2x + 4) : (2x + 1) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{\frac{21}{4}}{2x + 1} \\ -x^2 - \frac{1}{2}x \\ \hline -\frac{5}{2}x + 4 \\ \frac{5}{2}x + \frac{5}{4} \\ \hline \frac{21}{4} \end{array}$$

Det rasjonale uttrykket  $s(x)$  nærmer seg  $y = x/2 - 5/4$  når  $|x|$  blir stor, derfor har  $s(x)$  den skrå asymptoten  $y = x/2 - 5/4$ .

**Oppgave 5.** Bestem  $a$  slik at polynomet

$$p(x) = ax^2 + 3x - 4$$

har et nullpunkt i  $x = 2$ . Faktoriser deretter dette polynomet.

LF: Polynomet er delelig med  $x - 2$  hvis og bare hvis  $x = 2$  er en rot til polynomet. Vi har at  $p(2) = 4a + 6 - 4 = 2(2a + 1)$ . Dette er lik 0 hvis og bare hvis  $a = -1/2$ .

I dette tilfellet utfører vi polynomdivisjonen av  $-2p(x)$  med  $x - 2$  (slik at vi bare har heltallskoeffisienter)

$$\begin{array}{r} (x^2 - 6x + 8) : (x - 2) = x - 4 \\ -x^2 + 2x \\ \hline -4x + 8 \\ 4x - 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

Vi får faktoriseringen

$$p(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)(x - 4)$$

**Oppgave 6.** Finn tangentlinjene til grafen til

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 2$$

som er parallell til linjen  $y = 2x - 5$ .

LF: Vi deriverer funksjonen og får  $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ . Tangentlinjen i  $(x, f(x))$  er parallell til linjen  $y = 2x - 5$  når den deriverte er lik 2. Dette er ekvivalent til

$$f'(x) - 2 = 3x^2 + 4x + 1 = (3x + 1)(x + 1) = 0$$

(Faktoriseringen kan vi for eksempel finne ved å se at  $x = -1$  er en rot; så polynomet har en faktor  $(x + 1)$ .) Vi får derfor tangentlinjer som er parallell til den oppgitte linjen når  $x = -1/3$  og når  $x = -1$ . Tangentlinjen er ved ettpunktsformelen til en linje

$$y = 2(x - (-1)) + f(-1) = 2x + 2 - 4 = 2x - 2$$

$$y = 2(x - (-1/3)) + f(-1/3) = 2x + \frac{2}{3} + \frac{5}{27} - 3 = 2x + \frac{23}{27} - 3 = 2x - \frac{58}{27}$$

De to tangentlinjene er

$$y = 2x - 2 \quad \text{og} \quad y = 2x - \frac{58}{27}$$

**Oppgave 7.** Deriver funksjonene og skriv svarene enklest mulig.

a)  $\frac{\sqrt{x^3}x^{2/3}}{x^2}$

LF: a) Vi skriver  $\sqrt{x}$  som  $x^{1/2}$ , og får

$$\frac{\sqrt{x^3}x^{2/3}}{x^2} = x^{3/2}x^{2/3}x^{-2} = x^{(9+4)/6-2} = x^{1/6}$$

Den deriverte til denne funksjonen er lik

$$(x^{1/6})' = \underline{(1/6)x^{-5/6}}$$

b)  $|x| + |x + 3|$

LF: Vi benytter at  $|x|$  er lik  $x$  hvis  $x \geq 0$  og lik  $-x$  hvis  $x < 0$ . Tilsvarende er  $|x + 3|$  lik  $-(x + 3)$  hvis  $x \leq -3$  og lik  $x + 3$  hvis  $x > -3$ . Vi får derfor

$$|x| + |x + 3| = \begin{cases} -2x - 3 & x < -3 \\ 3 & -3 \leq x \leq 0 \\ 2x + 3 & x > 0 \end{cases}$$

Deriverer vi denne funksjonen får vi

$$(|x| + |x + 3|)' = \begin{cases} -2 & x < -3 \\ 0 & -3 < x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$$

Den deriverte eksisterer ikke for  $x = -3$  og for  $x = 0$ .

c)  $3x \ln |(2x)^5|$

LF: Definisjonsmengden til funksjonen er alle positive  $x$ . Vi forenkler uttrykket ved å bruke egenskaper til logaritmefunksjoner

$$3x \ln((2x)^5) = 3x \cdot 5 \ln(2x) = 15x \ln(2x)$$

Vi benytter produktregelen og kjerneregen og får

$$(15x \ln(2x))' = 15 \ln(2x) + 15x \frac{(2x)'}{2x} = 15 \ln(2x) + 15x \frac{2}{2x} = \underline{15 \ln(2x) + 15}$$

**Oppgave 8.** Vi studerer funksjonen gitt ved uttrykket  $f(x) = xe^{-x^2}$  med definisjonsmengde de reelle tallene.

a) Finn den deriverte til  $f(x)$  og bestem monotoniegenskapene til funksjonen (hvor den vokser og hvor den avtar). Finn topp- og bunnpunkt til funksjonen.

b) Bestem konkaviteten til  $f(x)$  (krumningen). Finn eventuelle vendepunkt til  $f(x)$ .

LF: a) Vi benytter produktregelen samt kjerneregen og får

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x(-x^2)'e^{-x^2} = \underline{(1 - 2x^2)e^{-x^2}}$$

$$f''(x) = (1 - 2x^2)'e^{-x^2} + (1 - 2x^2)(-x^2)'e^{-x^2} = (-4x - 2x(1 - 2x^2))e^{-x^2}$$

$$= \underline{-2x(3 - 2x^2)e^{-x^2}}$$

Det er verdt å merke seg at funksjonen  $f(x)$  er en odde funksjon:  $f(-x) = -f(x)$ , for alle  $x$ . Grafen til  $f(x)$  er derfor symmetrisk om origo. Funksjonen  $e^{-x^2}$  er alltid positiv. Fortegnet til  $f'(x)$  er derfor lik fortegnet til  $(1 - 2x^2)$ . Grafen til sistnevnte er en parabel med toppunkt i  $(0, 1)$  og nullpunkt for  $x = \pm 1/\sqrt{2}$ . Vi får at funksjonen er avtagende i  $\langle -\infty, -1/\sqrt{2} \rangle$  og i  $[1/\sqrt{2}, \infty \rangle$ , og funksjonen er voksende i intervallet  $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ .

Vi har et toppunkt i  $(1/\sqrt{2}, f(1/\sqrt{2})) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}e)$ , og et bunnpunkt i  $(-1/\sqrt{2}, f(-1/\sqrt{2})) = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}e)$ .

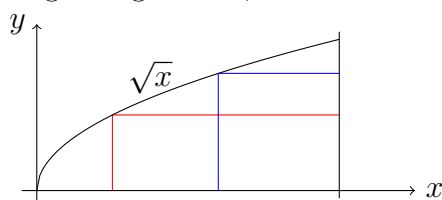
b) Fortegnet til  $f''(x)$  er lik fortegnet til  $-2x(3 - 2x^2)$ . Dette er et polynom av grad 3 som er lik 0 for  $x = 0$  og  $x = \pm\sqrt{3/2}$ . Fortegnet er negativt for  $x$  i  $\langle -\infty, -\sqrt{3/2} \rangle$  og i  $\langle 0, \sqrt{3/2} \rangle$ . Fortegnet er positivt for  $x$  i  $\langle -\sqrt{3/2}, 0 \rangle$  og i  $\langle \sqrt{3/2}, \infty \rangle$ . Vi konkluderer med at funksjonen  $f(x)$  er konkav ned i  $\langle -\infty, -\sqrt{3/2} \rangle$  samt i  $\langle 0, \sqrt{3/2} \rangle$ .

Den er konkav opp i  $\langle -\sqrt{3/2}, 0 \rangle$  samt i  $\langle \sqrt{3/2}, \infty \rangle$ . Funksjonen skifter konkavitet i  $x = 0$  og i  $x = \pm\sqrt{3/2}$ . Vendepunktene er derfor

$$\underline{(-\sqrt{3/2}, -\sqrt{3/2}e^{-3/2}) \quad (0, 0) \quad (\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}e^{-3/2})}$$

### Oppgave 9.

Bestem verdien  $a$  mellom 0 og 4 slik at (arealet til) rektangelet begrenset av  $x$ -aksen,  $y$ -aksen, grafen til  $\sqrt{x}$  og den vertikale linjen  $x = 4$  blir størst mulig. I følgende figur er to slike rektangler tegnet inn, for verdiene  $a = 1$  og  $a = 2.4$ .



LF: Arealet til rektangelet med horisontal side fra  $x$  til 4 er lik

$$a(x) = (4 - x) \cdot \sqrt{x} = 4x^{1/2} - x^{3/2}$$

Den deriverte til denne funksjonen er lik

$$a'(x) = \frac{4}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{4 - 3x}{2\sqrt{x}}$$

Arealfunksjonen  $a(x)$  er lik 0 i endepunktene 0 og 4, samt positiv for  $x$  ekte mellom 0 og 4. Det følger at  $a(x)$  har største verdi i det stasjonære punktet  $a = 4/3$ . Arealet er da lik

$$a(4/3) = (4 - 4/3)\sqrt{4/3} = (8/3)(2/\sqrt{3}) = 16/(3\sqrt{3})$$

**Oppgave 10.** Hvilke numerisk metode er implementert med Python koden nedenfor? Forklar hva programmet gjør når det kjøres.

```
r=20
n=0
a=1
b=2
def f(x):
    return 2**x - 3
for x in range(r):
    c = (a+b)/2
    if f(b) * f(c) > 0:
        b = c
    else:
        a = c
print(c)
```

Regn ut (uten bruk av maskiner) den eksakte verdien som koden hjelper oss å estimere. (Grensen av tallene vi får når  $r$  blir vilkårlig stor.)

LF: Programmet er en implementering av halveringsmetoden anvendt på funksjonen  $2^x - 3$  på intervallet  $[1, 2]$ . Programmet definerer funksjonen og en løkke kjøres 20 ganger. I løkken finner vi midtpunktet  $c$  mellom  $a$  og  $b$ . Vi sammenligner fortegnene til funksjonen  $f$  i midtpunktet  $c$  med fortegnene i  $a$  og  $b$ . Vi oppdaterer  $a$  eller  $b$  med verdien  $c$  slik at funksjonsverdien til  $f$  i de nye verdiene  $a$  og  $b$  har motsatt fortegn, eller funksjonen er lik 0 i minst en av  $a$  og  $b$ . Dette gjøres ved å sjekke om  $f(b)$  og  $f(c)$  begge har samme fortegn. Hvis dette er tilfelle oppdateres  $a$  til verdien  $c$ . Siden funksjonen er kontinuerlig og har motsatt fortegn i startverdiene for  $a$  og  $b$ ,  $f(1) = -1$  og  $f(2) = 1$ , så vil vi få at etter hver oppdatering, så er  $f(a)f(b) \leq 0$ . Tilslutt skriver programmet ut midtpunktet til de to verdiene av  $a$  og  $b$  slik at den kontinuerlige funksjonen  $f$  har mist ett nullpunkt i  $[a, b]$ . Avviket fra et nullpunkt til  $f$  og den endelige verdien  $c$  er mindre enn eller lik  $2^{-20}$ , siden vi halverer bredden på intervallet 20 ganger og opprinnelig bredde er lik 1.

Programmet gir en tilnærmet verdi til løsningen til likningen  $2^x - 3 = 0$ . Den eksakte løsningen kan vi uttrykke ved bruk av logaritmer. Løsningen er

$$\underline{x = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2(3)}$$