Løsningsforslag eksamen matematikk forkurs 26.05.2025

Oppgave 1

a) $\frac{4}{x-1} - \frac{5}{x+2} = \frac{4(x+2)}{(x-1)(x+2)} - \frac{5(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{4(x+2)-5(x-1)}{(x+2)(x-1)}$

$$= \frac{(4x+8)-(5x-5)}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{4x+8-5x+5}{(x+2)(x-1)} = \frac{13-x}{(x+2)(x-1)} = \frac{13-x}{x^2+x-2}$$

b) <u>Alternativ 1:</u>

$$\begin{aligned}
&(x^3+3x^2-x-3):(x-1) = x^2+4x+3 \\
&\underline{-(x^3-x^2)} \\
&\quad 4x^2-x \\
&\quad \underline{-(4x^2-4x)} \\
&\qquad 3x-3 \\
&\qquad \underline{-(3x-3)} \\
&\qquad\quad 0
\end{aligned}$$

Polynomdivisjonen går opp, altså er $(x-1)$ en faktor i $P(x)$.

<u>Alternativ 2:</u>

$(x-1) = 0$ når $x = 1$

Sjekker om $P(1) = 0$:

$P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 - 3 = 1 + 3 - 1 - 3 = 0$

Siden $P(1) = 0$, er (x-1) en faktor i $P(x)$.

<u>Faktoriserer $x^2 + 4x + 3$:</u>

Finner nullpunkter:

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$$

$$x_1 = -3 \quad og \quad x_2 = -1$$

$x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$

Da kan tredjegradsuttrykket skrives på faktorisert form slik:

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x - 1)(x + 3)(x + 1)$

Oppgave 2

a) Alternativ 1:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4}{x} = 3x - 4x^{-1}$$

$$f'(x) = 3 + 4x^{-2} = 3 + \frac{4}{x^2}$$

Alternativ 2: Brøkregelen

$u = 3x^2 - 4 \qquad u' = 6x$

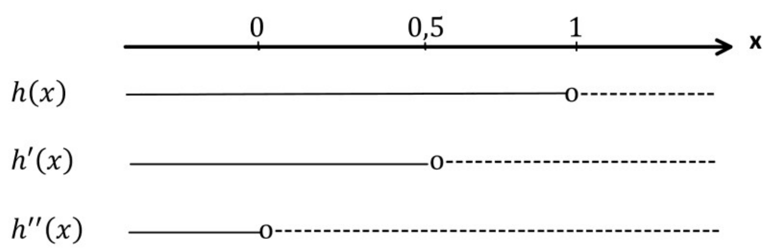
$v = x \qquad v' = 1$

$$f'(x) = \frac{6x \cdot x - (3x^2 - 4) \cdot 1}{x^2} = \frac{3x^2 + 4}{x^2} = 3 + \frac{4}{x^2}$$

b) Bruker kjerneregelen der $u = \pi x$ og $u' = \pi$

$g'(x) = 2\cos(\pi x) \cdot \pi + 6x^2 = 2\pi\cos(\pi x) + 6x^2$

c) Fortegnslinje for $h(x), h'(x)$ og $h''(x)$



Oppgave 3

a) $2\sin x + 1 = 0 \qquad x \in [0, 4\pi\rangle$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \qquad k \in Z$

$x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k2\pi$

$x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$

$x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

$x = -\frac{\pi}{6} + 1 \cdot 2\pi = \frac{11\pi}{6}$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi = \frac{23\pi}{6}$

$x = \frac{7\pi}{6} + 0 \cdot 2\pi = \frac{7\pi}{6}$

$x = \frac{7\pi}{6} + 1 \cdot 2\pi = \frac{19\pi}{6}$

$L = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}\right\}$

b) $\ln x - \ln(x+1) = 1 \qquad x \in \langle -1, \rightarrow\rangle$

$\ln \frac{x}{x+1} = 1$

$$\frac{x}{x+1} = e$$

$$x = e(x+1)$$

$$x = ex + e$$

$$x - ex = e$$

$$x(1-e) = e$$

$$x = \frac{e}{1-e} \approx -1{,}58$$

$$L = \emptyset \quad (fordi - 1{,}58 \;\; ikke\ er\ med\ i\ definisjonsmengden)$$

c) $\frac{2x-4}{x+2} \geq 1$

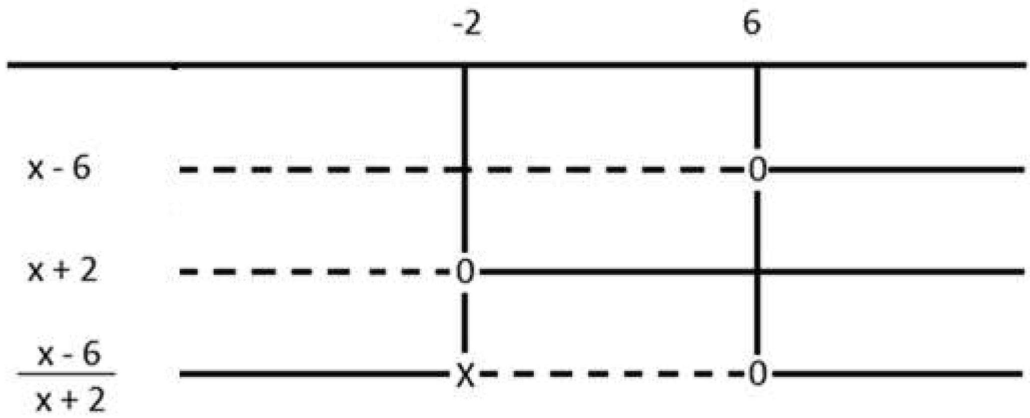
$$\frac{2x-4}{x+2} - 1 \geq 0$$

$$\frac{2x-4}{x+2} - \frac{x+2}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{2x-4-(x+2)}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{2x-4-x-2}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{x-6}{x+2} \geq 0$$



$x \in \langle \leftarrow, -2 \rangle \cup [6, \rightarrow \rangle$

Oppgave 4

a) $\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{2x+1}{u} \cdot \frac{du}{2x+1} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x^2 + x| + C$

$u = x^2 + x$

$\frac{du}{dx} = 2x + 1$

$dx = \frac{du}{2x + 1}$

b) $\int (2x+1)e^x dx = (2x+1)e^x - \int 2e^x dx = (2x+1)e^x - 2e^x + C$

$= e^x(2x + 1 - 2) + C$

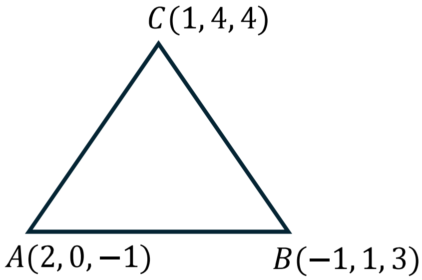
$v = 2x + 1 \qquad v' = 2$

$= e^x(2x - 1) + C$

$u = e^x \qquad u' = e^x$

$$\int_0^1 (2x+1)e^x dx = [e^x(2x-1)]_0^1 = e^1(2 \cdot 1 - 1) - e^0(2 \cdot 0 - 1) = e + 1$$

Oppgave 5



a) $\overrightarrow{AB} = [-1-2, 1-0, 3-(-1)] = [-3, 1, 4]$

$\overrightarrow{AC} = [1-2, 4-0, 4-(-1)] = [-1, 4, 5]$

$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = [-3,1,4] - 2[-1,4,5] = [-3,1,4] - [-2,8,10]$

$= [-3-(-2), 1-8, 4-10] = [-1, -7, -6]$

b) Finner en normalvektor til planet:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ -3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\overrightarrow{e_x} - \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}\overrightarrow{e_y} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\overrightarrow{e_z}$$

$$= (5-16)\overrightarrow{e_x} - (-15-(-4))\overrightarrow{e_y} + (-12-(-1))\overrightarrow{e_z}$$

$$= -11\overrightarrow{e_x} + 11\overrightarrow{e_y} - 11\overrightarrow{e_z}$$

$$= [-11, 11, -11]$$

<u>Alternativ 1. Bruker [−11, 11, −11] som normalvektor i ligningen til planet:</u>

Bruker punktet $A(2,0,-1)$. (Kan også bruke B eller C)

$$-11(x-2) + 11(y-0) - 11(z+1) = 0$$
$$-11x + 22 + 11y - 11z - 11 = 0$$
$$-11x + 11y - 11z + 11 = 0$$
$$-\frac{1}{11}(-11x + 11y - 11z + 11) = -\frac{1}{11} \cdot 0$$
$$x - y + z - 1 = 0$$

$\beta: \quad x - y + z = 1$

Alternativ 2. Bruker en parallellvektor til $[-11, 11, -11]$ som normalvektor:

Bruker punktet $A(2, 0, -1)$.

$$\vec{n} = -\frac{1}{11}[-11, 11, -11] = [1, -1, 1]$$

$$\begin{aligned} 1(x-2) - 1(y-0) + 1(z+1) &= 0 \\ (x-2) - y + (z+1) &= 0 \\ x - 2 - y + z + 1 &= 0 \\ x - y + z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\beta: \quad x - y + z = 1$$

c) $\overrightarrow{AP} = [2-2,\ 6-0, 2-(-1)] = [0, 6, 3]$

Alternativ 1:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AP}\right| = \frac{1}{6}|[-11, 11, -11] \cdot [0, 6, 3]| \\ &= \frac{1}{6}|-11 \cdot 0 + 11 \cdot 6 + (-11) \cdot 3| = \frac{1}{6} \cdot 33 = \frac{11}{2} = 5{,}5 \end{aligned}$$

Alternativ 2:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AP}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|-3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{6}|-3(12-30) - (-3-0) + 4(-6-0)| = \frac{1}{6}|54 + 3 - 24| = \frac{1}{6} \cdot 33 = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

d) Finner parameterframstilling av linja l:
Bruker normalvektoren $[1, -1, 1]$ til planet β som retningsvektor til l.
Bruker punktet $P(2, 6, 2)$.

$$l: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 6 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

I xy-planet er z-koordinaten lik 0. Setter $z = 0$ inn i uttrykket for z-koordinaten for å finne verdien til t som gjør at punktet ligger i xy-planet.

$0 = 2 + t$
$\underline{t = -2}$

Setter inn $t = -2$ for å finne x- og y-koordinatene:
$x = 2 - 2 = 0$
$y = 6 - (-2) = 8$

$Q(0, 8, 0)$

Oppgave 6

a) $5 + 13 + 21 + 29 + 37$

$a_1 = 5 \qquad d = 8$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_{72} = 5 + (72 - 1) \cdot 8 = 573$

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$s_{72} = \frac{a_1 + a_{72}}{2} \cdot 72 = \frac{5 + 573}{2} \cdot 72 = 20808$$

b) Finner et uttrykk for a_n for denne rekka:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 5 + (n - 1) \cdot 8 = 8n - 3$

Setter inn i $s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$$5000 = \frac{5 + (8n - 3)}{2} \cdot n$$

$5000 \cdot 2 = (5 + (8n - 3)) \cdot n$

$10000 = (8n + 2) \cdot n$

$10000 = 8n^2 + 2n$

$8n^2 + 2n - 10000 = 0$

$$n = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-10000)}}{2 \cdot 8} \approx \frac{-2 \pm 565{,}69}{16} \approx \begin{cases} 35{,}23 \\ -35{,}48 \end{cases}$$

Det er bare den positive løsningen som gir mening.
Antall ledd må være et heltall. Runder opp fordi summen skal være <u>minst</u> 5000.

Rekka må minst ha 36 ledd

$a_{36} = 8 \cdot 36 - 3 = 285$

Oppgave 7

$Areal$:

(2) $\frac{1}{2} A \cdot B = 16$

Summen av katetene:

$A + B = 12$

(1) $A = 12 - b$

Setter $(1)\ inn\ i\ (2)$

$\frac{1}{2}(12 - B) \cdot B = 16$

$(12 - B) \cdot B = 32$

$12B - B^2 = 32$

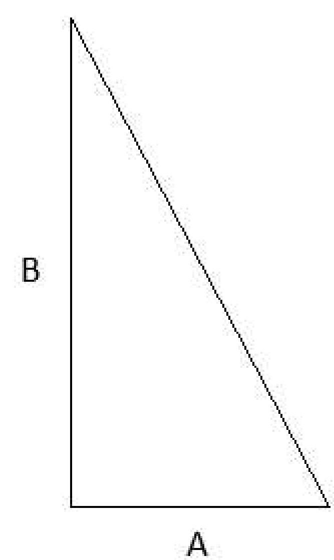
$B^2 - 12B + 32 = 0$

$B = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 16}{2}$

$B_1 = \frac{12 + 4}{2} = 8$ $\qquad$ $B_2 = \frac{12 - 4}{2} = 4$

$A_1 = 12 - 8 = 4$ $\qquad$ $A_2 = 12 - 4 = 8$

$Katetene\ er\ 8m\ og\ 4m$



Oppgave 8

a) $D_f = \mathbb{R}$

Nullpunkt: $f(x) = 0$

$(x - 2)e^x = 0$

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$e^x = 0 \Rightarrow$ ingen løsning

b) Produktregelen

$u = (x-2) \qquad u' = 1$

$v = e^x \qquad v' = e^x$

$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-2) \cdot e^x = e^x(x-1)$

c) Eventuelle topp- og bunnpunkter:

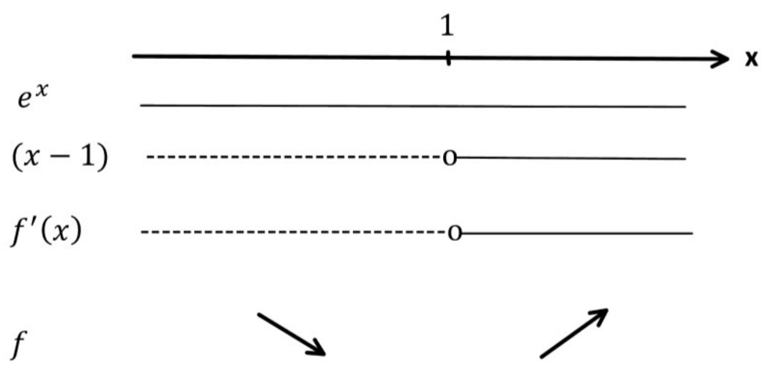
$f'(x) = 0$

$(x-1)e^x = 0$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$e^x = 0 \Rightarrow$ ingen løsning

Lager fortegnsskjema:



Ser at det er et bunnpunkt når $x = 1$

Finner tilhørende y-verdi:

$f(1) = (1-2)e^1 = -e$

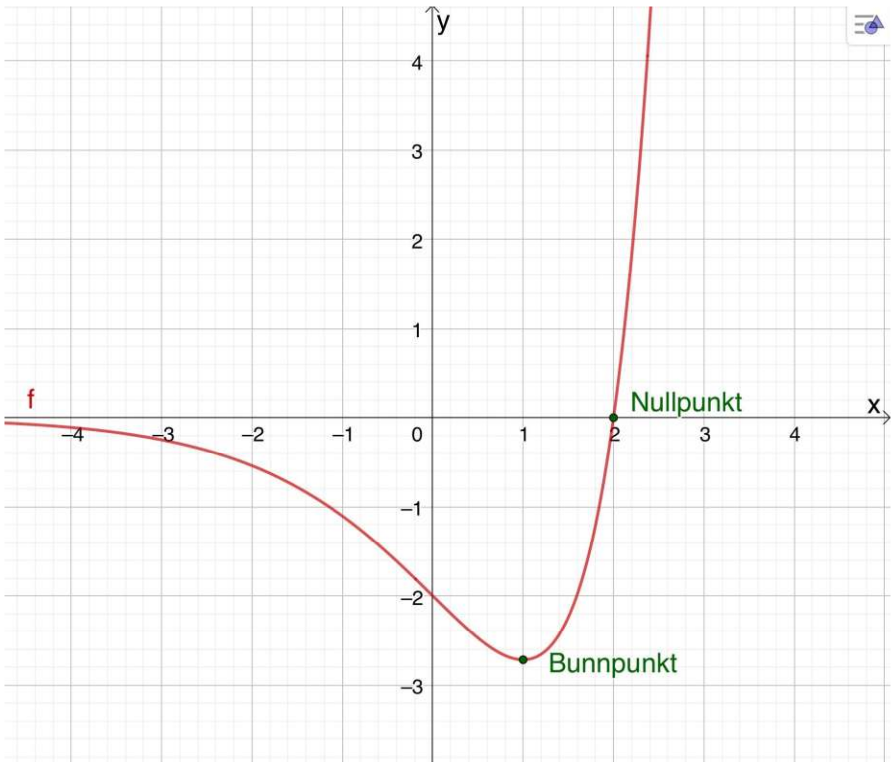
Bunnpunkt: $(1, -e)$

Monotoniegenskaper:

f synker når $x < 1$ (Evt. $x \leq 1$)

f vokser når $x > 1$ (Evt. $x \geq 1$)

d) Tegning av grafen:



e) Bruker ettpunktsformelen: $y - y_0 = a(x - x_0)$

$y_0 = f(-1) = (1-e)e^{-1} = \frac{-3}{e}$

$a = f'(-1) = e^{-1}(-1-1) = \frac{-2}{e}$

$y + \frac{3}{e} = \frac{-2}{e}(x+1)$

$y = \frac{-2}{e}x - \frac{5}{e}$

Oppgave 9

a) Alternativ 1: b**2 – 4*a*c

Alternativ 2: b*b – 4*a*c

b) «Likningen har ingen løsning» og «Likningen har èn løsning: x = »