Prøve i	Fork1120 Matematikk
Dato:	6. desember 2024
Tid:	kl 09 - 14
Antall oppgaver:	10 (20 deloppgaver)
Hjelpemiddel:	Formelsamling og kalkulator

Løsningsforslag

Oppgave 1. Løs likningene og oppgi svarene eksakt

a) $x(2-x)+x^2 = 5x+7$

LF: (Vi gir en svært detaljert gjennomgang.) Ganger vi ut parentesen i venstresiden får vi

$$2x - x^2 + x^2 = 2x$$

Likningen er derfor ekvivalent til $2x = 5x + 7$. Vi legger til $(-5x)$ på begge sider av likhetstegnet (som er det samme som å flytter $5x$ over til venstre siden av likhetstegnet, og skifter fortegn). Dette gir $2x - 5x = 7$ som er ekvivalent til $-3x = 7$, Vi ganger med $-1/3$ på begge sider av likhetstegnet og får løsningen $\underline{x = \frac{7}{-3} = \frac{-7}{3}}$.

b) $\pi x - \sqrt[3]{5} = \sqrt{5}$

LF: Dette er en lineær likning i x. Vi flytter $-\sqrt[3]{5}$ over til andre siden av likhetstegnet og deler deretter med π på begge sider av likhetstegnet. Løsningen er

$$\underline{x = \frac{\sqrt{5}+\sqrt[3]{5}}{\pi}}$$

c) $\dfrac{x^2}{x+2} = 3$

LF: Uttrykket til venstre i likningen er definert for alle $x \neq -2$. Vi antar at $x \neq -2$. Likningen er da ekvivalent til likningen vi får ved å gange begges sider av likhetstegnet med $x+2 \neq 0$. Vi ender opp med en kvadratisk likning $x^2 = 3(x+2) = 3x+6$. Vi samler alle ledd på venstre side av likhetstegnet, og fullfører kvadratet

$$x^2 - 3x - 6 = (x-3/2)^2 - (-3/2)^2 - 6 = (x-3/2)^2 - 33/4 = 0$$

De to løsningene er $\underline{x = 3/2 \pm \sqrt{33}/2}$.

d) $\sqrt{2x+12} = x+2$

LF: Dette er en irrasjonal likning. Alle løsningene til likningen oppfyller også likningen vi får ved å kreve at kvadratet av høyresiden av likhetstegnet, skal være lik kvadratet av venstresiden av likhetstegnet. Dette er likningen

$$2x + 12 = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

Vi samler alle leddene på den ene siden av likhetstegnet.

$$x^2 + (4-2)x + 4 - 12 = x^2 + 2x - 8 = 0$$

Likningen velger vi å løse ved å fullføre kvadratet

$$(x+1)^2 - 1 - 8 = 0 \iff (x+1)^2 = 9 = 3^2$$

Løsningene til likningen vi får etter kvadrering, er derfor $x = -1 \pm 3$. (Alternativt, benytt annengradsformelen.) Vi undersøker nå hvilken av disse løsningene som er løsninger til den opprinnelige likningen.

Sjekker $x = -1 - 3 = -4$: Venstre siden er lik $\sqrt{4} = 2$ og høyresiden er lik -2. Dette er derfor en "falsk løsning".

Sjekker $x = -1 + 3 = 2$: Venstre siden er lik $\sqrt{16} = 4$ og høyresiden er lik 2+2 =4.

Løsningen til likning er derfor $\underline{x = 2}$.

e) $\ln|x| - \ln|x+2| = 3$

LF: Likningen er ekvivalent til

$$\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| = 3 = \ln e^3$$

Siden ln er en økende funksjon, så er dette ekvivalent til

$$\left|\frac{x}{x+2}\right| = e^3$$

Her er det to muligheter

$$\frac{x}{x+2} = e^3 \qquad \text{eller} \qquad \frac{x}{x+2} = -e^3$$

Vi løser disse likningene tilsvarende som i del c). Løsningne er

$$\underline{x = \frac{2e^3}{1-e^3} \quad \text{og} \quad x = \frac{-2e^3}{1+e^3}}$$

f) $8^{(x^2)} = 2^{x+1}$

LF: Vi benytter at $8 = 2^3$ og at eksponentfunksjonen er monoton. (Alternativt, ta en logaritme på begge sider av likhetstegnet etc.) Dette gir den ekvivalente likningen $3x^2 = x + 1$. Samler vi alle leddene på den ene siden av likhetstegnet får vi annengradslikningen på standard form $3x^2 - x - 1 = 0$. Vi benytter *abc*-formelen og får løsningene

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \underline{\frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}}$$

Oppgave 2. Vi har en liste med fem tall, hvor verdiene til det første og det siste tallet er kjent

$$\underline{73 \qquad x \qquad y \qquad z \qquad 111}$$

Vi vet også at summen av de tre første tallene er lik 100, summen av de tre siste tallene er lik 150 og at summen av alle fem tallene er lik 230. Bestem verdiene til de tre tallene x, y og z.

LF: De tre opplysningene kan vi formulere som tre lineære likninger i de tre variablene

$$73 + x + y = 100 \qquad y + z + 111 = 150 \quad \text{og} \quad 73 + x + y + z + 111 = 230$$

Vi flytter konstantleddene over til høyre side av likhetstegnene og får

$$x + y = 27 \qquad y + z = 39 \quad \text{og} \quad x + y + z = 46$$

Vi trekker nå den tredje likningen fra summen av den første og den andre likning, og får

$$(x + y) + (y + z) - (x + y + z) = y = 27 + 39 - 46 = 20$$

Vi bruker de to første likningene til å finne x og z

$$x = 27 - y = 7 \quad \text{og} \quad z = 39 - y = 19$$

De tre ukjente tallene må derfor være

$$\underline{x = 7 \quad y = 20 \quad z = 19}$$

Oppgave 3. Løs ulikhetene

$$a) \quad x^2 > 5 \qquad b) \quad x^2 < -3x \leq 4 \qquad c) \quad \frac{1}{x} \geq \frac{2}{x-2}$$

LF: *a*) Ulikheten er ekvivalent til ulikheten $x^2 - 5 > 0$. Vi faktoriserer polynomet og får $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) > 0$. Et fortegnskjema gir at løsningene er alle $x < -\sqrt{5}$ samt alle $x > \sqrt{5}$. Vi kan skrive løsningsmengden opp som $\underline{x \in \langle -\infty, -\sqrt{5} \rangle \cup \langle \sqrt{5}, \infty \rangle}$.

b) Her har vi en dobbel ulikhet. Vi må derfor finne felles løsninger til de to ulikhetene. Vi samler alle leddene på ene siden av ulikhetstegnet for hver av de to ulikhetene, og får

$$x^2 + 3x < 0 \quad \text{og} \quad 3x + 4 \geq 0$$

Vi faktoriserer uttrykkene

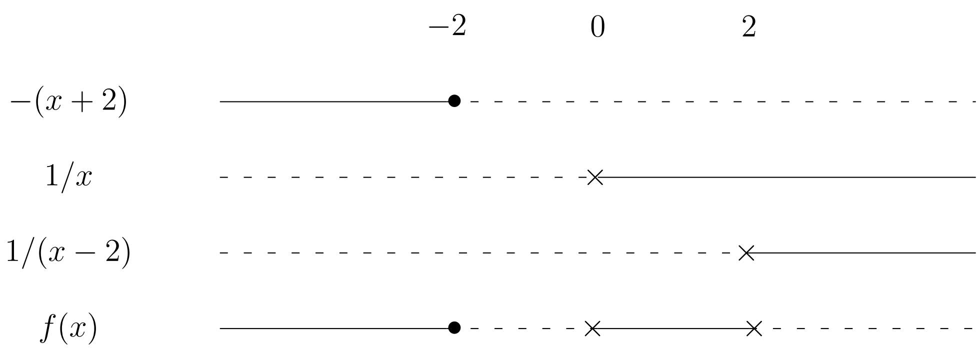
$$x(x+3) < 0 \quad \text{og} \quad 3x + 4 \geq 0$$

Den første ulikheten har løsningsmengde $\langle -3, 0\rangle$. Den andre ulikheten har løsningsmengde $[-4/3, \infty\rangle$. Løsningene til den doble ulikheten, som er den felles løsningsmengden til de to ulikhetene, er $\langle -3, 0\rangle \cap [-4/3, \infty\rangle = \underline{[\text{ -4/3 , 0 }\rangle}$.

c) Vi flytter uttrykkene over på venstre side av ulikhetene, og finner en felles nevner

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} = \frac{x - 2 - 2x}{x(x-2)} = \frac{-(x+2)}{x(x-2)} \geq 0$$

Her er fortegnsskjemaet



Vi leser av løsningene $\underline{\langle -\infty, -2] \cup \langle 0, 2\rangle}$.

Oppgave 4. Finn alle nullpunkter og asymptoter til følgende rasjonale uttrykk

$$r(x) = \frac{x^3 - x^2 - 3x - 1}{x^2 - 1}$$

Bestem den naturlige definisjonsmengden til uttrykket.

LF: Nevneren faktoriseres som $(x+1)(x-1)$, ved konjugatsetningen. Vi sjekker om noen små heltall kan være røtter til telleren. Vi ser at $x = -1$ er en rot fordi $(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) - 1 = -1 - 1 + 3 - 1 = 0$. Vi utfører polynomdivisjon og deler telleren med $x + 1$.

$$\begin{array}{llll}
\big(\;\; x^3 & - x^2 & - 3x & - 1\big) : \big(x+1\big) = x^2 - 2x - 1 \\
\underline{-x^3} & \underline{- x^2} & & \\
 & - 2x^2 & - 3x & \\
 & \underline{\;\;\, 2x^2} & \underline{+ 2x} & \\
 & & - x & - 1 \\
 & & \underline{\;\;\;\, x} & \underline{+ 1} \\
 & & & \;\;\; 0
\end{array}$$

Polynomet $x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - (-1)^2 - 1 = (x-1)^2 - 2 = (x-1)^2 - (\sqrt{2})^2$ faktoriser som $(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$, ved konjugatsetningen.

Funksjonen $r(x)$ er definert for alle x bortsett fra -1 og 1. Vekk fra disse to verdiene er det rasjonale uttrykket $r(x)$ lik

$$\frac{(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})}{x - 1}$$

Funksjonen har nullpunkt i $x = 1 + \sqrt{2}$ og i $x = 1 - \sqrt{2}$. Vi har en vertikal asymptote i $x = 1$. Graden til telleren er én mer enn graden til nevneren. Vi har derfor én skrå asymptote. For å bestemme denne utfører vi polynomdivisjonen

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^2 - 2x - 1\big) : \big(x - 1\big) = x - 1 + \dfrac{-2}{x-1} \\
\underline{-\,x^2 \;\; + x} \\
\qquad\quad -\,x - 1 \\
\qquad\quad \underline{\quad x - 1} \\
\qquad\qquad\; -\,2
\end{array}$$

Det rasjonale uttrykket nærmer seg $y = x - 1$ når $|x|$ blir stor, derfor har $r(x)$ den skrå asymptoten $y = x - 1$.

Oppgave 5. Bestem a slik at polynomet

$$p(x) = 2x^2 + ax - 5$$

blir delelig med $x - 2$. Faktoriser deretter dette polynomet.

LF: Polynomet er delelig med $x - 2$ hvis og bare hvis $x = 2$ er en rot til polynomet. Vi har at $p(2) = 8 + 2a - 5 = 3 + 2a$. Dette er lik 0 hvis og bare hvis $a = -3/2$.

I dette tilfellet utfører vi polynomdivisjonen av $2p(x)$ med $x - 2$ (slik at vi bare har heltallskoeffisienter)

$$\begin{array}{l}
\big(\quad 4x^2 - 3x - 10\big) : \big(x - 2\big) = 4x + 5 \\
\underline{-\,4x^2 + 8x} \\
\qquad\qquad 5x - 10 \\
\qquad\quad \underline{-\,5x + 10} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Vi får faktoriseringen

$$\underline{p(x) = (x - 2)(2x + 5/2)}$$

Oppgave 6. Bestem grensene hvis de finnes

a) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}}$

LF: a) Grensen er av type 0/0, dvs. både teller og nevner i uttrykket går mot 0 når x nærmer seg 3. I dette tilfellet kan vi utføre polynomdivisjon og finner

$$
\begin{array}{l}
\big(\ x^3 \qquad\qquad\qquad - 27\big) : \big(x-3\big) = x^2+3x+9 \\
\underline{-\,x^3+3x^2} \\
\qquad\quad 3x^2 \\
\qquad \underline{-\,3x^2+9x} \\
\qquad\qquad\quad 9x-27 \\
\qquad\qquad \underline{-\,9x+27} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Vekk fra 3 er det rasjonale uttrykket lik polynomet x^2+3x+9. Polynomet er kontinuerlig for alle x. Grensen når x går mot 3 er derfor lik verdien til polynomet i $x = 3$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x^2+3x+9) = \underline{27}$$

b) I dette tilfellet også så har vi en grense av type 0/0. Vi ganger med den konjugerte $\sqrt{2}+\sqrt{x}$ til $\sqrt{2}-\sqrt{x}$, i teller og nevner. Nevneren blir da $2-x$. Siden $x^3-2x^2 = x^2(x-2)$ så er

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2(x-2)(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{2-x} = \lim_{x\to 2} -x^2(\sqrt{2}+\sqrt{x}) = \underline{-8\sqrt{2}}$$

Oppgave 7. Deriver funksjonene

a) $3x^2 - x^{-3} + 4\sqrt{x}$

b) $2x\ln(x^3) + 4$

c) $3(4+5x^2)^7$

LF: a) Vi skriver $\sqrt{x}$ som $x^{1/2}$, og benytter derivasjonsregelen $(x^r)' = rx^{r-1}$ kombinert med lineæritet

$$(3x^2 - x^{-3} + 4\sqrt{x})' = 3(x^2)' - (x^{-3})' + 4(x^{1/2})' = \underline{6x + 3x^{-4} + 2x^{-1/2}}$$

Vi kan også skrive dette som

$$6x + \frac{3}{x^4} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

b) Vi benytter at $\ln(x^3) = 3\ln(x)$ (alternativt kan kjerneregelen benyttes) og produktregelen sammen med lineæritet til derivasjon, og får

$$(2x \cdot 3\ln(x) + 4)' = 6\left(x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln(x)\right) + (4)' = \underline{6 + 6\ln(x)}$$

c) Her benytter vi lineæritet og kjerneregelen

$$(3(4+5x^2)^7)' = 3 \cdot 7(4+5x^2)^6 \cdot (4+5x^2)' = 3 \cdot 7(4+5x^2)^6(10x) = \underline{210x(4+5x^2)^6}$$

Oppgave 8. Finn ut for hvilke x-verdier funksjonen gitt ved uttrykket $f(x) = xe^{-x/2}$ og med definisjonsmengde intervallet $[0,3]$, er størst og minst.
LF: Vi deriverer funksjonen og får

$$f'(x) = e^{-x/2} + (-1/2)xe^{-x/2} = (1 - x/2)e^{-x/2}$$

Funksjonen er deriverbar for alle x, og den deriverte er lik 0 når $x = 2$. Funksjonsverdien er da lik $f(2) = 2/e \simeq 0.7357$. Den deriverte er positiv for $x < 2$, og derfor stigende. Den deriverte er negativ for $x > 2$, og derfor avtagende. Vi finner funksjonsverdiene i endepunktene $x = 0$ og $x = 3$. Vi har

$$f(0) = 0 \qquad f(3) = 3/e^{3/2} \cong 0.6694$$

Funksjonen $f(x)$ er derfor størst i $\underline{x = 2}$ og verdien er da lik $2/e$. Funksjonen er minst i $\underline{x = 0}$ og verdien er da lik 0. (For $x = 3$ har funksjonen et lokalt bunnpunkt.)

Oppgave 9. Gi eksempel på en funksjon gitt ved et uttrykk (med delt forskrift) slik at den naturlig definisjonsmengden består av alle reelle tall ekte større enn 1, bortsett fra tallet 3, og slik at den er kontinuerlig i alle punkt i definisjonsmengden bortsett fra i $x = 2$.

LF: Her er slik funksjon.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & x < 2 \\[2ex] \dfrac{1}{x-3} & x \geq 2 \end{cases}$$

Oppgave 10. Forklar hva følgende Python kode gjør når den kjøres. Finn tallet den regner ut.

```python
n=99
sum=0
def f(x):
    return 2*x +1
for x in range(n):
    print(f(x),'+ ',end='') #end='' linjeskifte i print() fjernes
    sum = sum + f(x) #sum oppdateres ved at f(x) legges til
print(f(n),'= ',end='')
sum = sum + f(n)
print(sum)
```

Modifiser koden slik at den skriver ut summen av de 50 første kvadrattallene $1 + 4 + 9 + \cdots + 50^2 =$, samt at den skriver ut verdien til summen.

LF: Koden skriver ut $1+3+5+\cdots+199 = 10\,000$. Programmet legger sammen de 100 første oddtallene og skriver opp verdien til høyre for likhetstegnet. (Det er tilstrekkelig å si at verdien til summen skrives opp, uten å finne denne verdien.)

Vi kan modifisere koden ved å la linje 1 være $n = 49$, funksjonen skal returnere $(x+1) * *2$. (Det er $x+1$ opphøyd i andre potens. For-løkken starter med $x = 0$, derfor benytter vi $x + 1$.)

Alternativt, og bedre, kan vi benytte $n = 50$ og la funksjonen være $x * *2$. Da må vi be for-løkken om å benytte verdier som starter med $x = 1$. Dette kan vi gjøre ved å skrive

```
n=50
sum=0
def f(x):
    return  x**2
for x in range(1,n):
    print(f(x),'+ ',end='') #end='' linjeskifte i print() fjernes
    sum = sum + f(x) #sum oppdateres ved at f(x) legges til
print(f(n),'= ',end='')
sum = sum + f(n)
print(sum)
```

(Kjører vi dette programmet får vi at summen av de 50 første kvadrattallene er lik 42925.)