Oppgave 1

a) Det er ulike måter å skrive om dette uttrykket på.

$$\left(\frac{x^3}{27}\right)^{-2/3} = \left(\frac{27}{x^3}\right)^{2/3} = \left(\frac{3^3}{x^3}\right)^{2/3} = \frac{(3^3)^{2/3}}{(x^3)^{2/3}} = \frac{3^2}{x^2} = \left(\frac{3}{x}\right)^2 = \frac{9}{x^2}$$

b)

$$\begin{aligned}\ln(xy)+\ln(x^2y)-\ln(xy^2) &= \ln(x)+\ln(y)+\ln(x^2)+\ln(y)-\ln(x)-\ln(y^2)\\ &= \ln(x)+\ln(y)+2\ln(x)+\ln(y)-\ln(x)-2\ln(y)\\ &= 2\ln(x)\end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Her er definisjonsområdet $\mathbb{R}\backslash\{0,3\}$. Utvid brøkene på venstre side til fellesnevner x^2-3x:

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-3}+\frac{1}{x} &= \frac{3x}{x^2-3x}\\ \frac{x\cdot x}{(x-3)\cdot x}+\frac{1\cdot(x-3)}{x\cdot(x-3)} &= \frac{3x}{x^2-3x}\\ \frac{x^2+x-3}{x^2-3x} &= \frac{3x}{x^2-3x}\\ x^2+x-3 &= 3x\\ x^2-2x-3 &= 0\end{aligned}$$

Finn nullpunktene:

$$x = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm 4}{2}$$

som gir $x_1=-1$ og $x_2=3$.

Her er det bare x_1 som er en løsning.

b) Definisjonsområdet er $x \le 3$. Flytt over og fjern kvadratrot:

$$\begin{aligned}-3+\sqrt{3-x} &= x\\ \sqrt{3-x} &= x+3\\ 3-x &= (x+3)^2 = x^2+6x+9\\ x^2+7x+6 &= 0\end{aligned}$$

Finn nullpunktene:

$$x = \frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{2} = \frac{-7\pm 5}{2}$$

som gir $x_1=-6$ og $x_2=-1$. Her er begge løsningene med i definisjonsområdet, men kontroll viser at x_1 ikke er en «ekte» løsning (på grunn av rottegnet):

$$-3+\sqrt{3-(-6)} = -3+\sqrt{9} = -3+3 = 0$$

og ikke -6.

Her er det bare x_2 som er en løsning.

c) Definisjonsområdet er der $2x^2 + x > 0$, eller $x(2x+1) > 0$ som (vis ved fortegnskjema) er $x < -\frac{1}{2} \cup x > 0$.

$$\begin{aligned} \ln(2x^2 + x) &= 0 \\ 2x^2 + x &= e^0 = 1 \\ 2x^2 + x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Finn nullpunktene:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

som gir $x_1 = -1$ og $x_2 = \frac{1}{2}$.

Oppgave 3

a) Tangenten er et uttrykk på formen $y = ax + b$, der

$$y = f(1), \quad a = \text{stigningstallet}, \quad x = 1, \quad b = \text{ukjent}$$

Finn den deriverte:

$$f'(x) = \frac{-1}{3-x} \quad \rightarrow \quad f'(1) = \frac{-1}{2} = a$$

og y-verdien:

$$f(1) = \ln(2) = y$$

og sett inn for å finne b:

$$y = ax + b \quad \rightarrow \quad \ln(2) = \frac{-1}{2} \cdot 1 + b \quad \rightarrow \quad b = \frac{1}{2} + \ln(2)$$

og tangenten blir da

$$y = \frac{-1}{2}x + \ln(2) + \frac{1}{2}$$

b) Ingen horisontal asymptote ($f(x)$ vokser over alle grenser når $x \rightarrow \infty$), men en vertikal asymptote i $x = 3$.

Oppgave 4

a) Finn ett nullpunkt som en start:

$$\begin{aligned} 1 + 2\sin(\pi x) &= 0 \\ \sin(\pi x) &= \frac{-1}{2} \\ \pi x &= \sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-\pi}{6} \end{aligned}$$

Utgangspunktet er altså $\pi x_0 = \frac{-\pi}{6}$ (som ikke er med i definisjonsområdet). Vi registrerer først at når $x \in [0,4]$ så vil $\pi x \in [0,4\pi] = \left[0,\frac{24\pi}{6}\right]$. Vi kan finne flere nullpunkt ved å legge til $k \cdot 2\pi$:

$$\pi x_1 = \pi x_0 + 1 \cdot 2\pi = \frac{-\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}, \quad \pi x_2 = x_0 + 2 \cdot 2\pi = \frac{23\pi}{6}$$

Vi kan ikke legge til flere multiplum av 2π, for da kommer vi utenfor definisjonsområdet. Men vi kan finne et nullpunkt ved

$$\pi x_3 = \pi - \pi x_0 = \frac{6\pi}{6} - \frac{-\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

og så legge til et multiplum av 2π:

$$\pi x_4 = \frac{7\pi}{6} + 1 \cdot \frac{12\pi}{6} = \frac{19\pi}{6}$$

Men også her må vi stoppe; neste verdi kommer utenfor definisjonsområdet. Den komplette listen av nullpunkt er dermed

$$\pi x_3 = \frac{7\pi}{6}, \quad \pi x_1 = \frac{11\pi}{6}, \quad \pi x_4 = \frac{19\pi}{6}, \quad \pi x_2 = \frac{23\pi}{6}$$

og når vi deler på π får vi

$$x_3 = \frac{7}{6}, \quad x_1 = \frac{11}{6}, \quad x_4 = \frac{19}{6}, \quad x_2 = \frac{23}{6}$$

b) Perioden er 2, amplituden (utslaget fra likevektslinjen) er 2, og likevektslinjen er 1.

c) At grafen til f *tangerer* linja $y = 3$ betyr at $f(x) = 3$ for de to verdiene, men grafen skal ikke skjære linja. Vi skal altså løse likningen $f(x) = 3$:

$$\begin{aligned} 1 + 2\sin(\pi x_1) &= 3 \\ \sin(\pi x_1) &= \frac{2}{2} = 1 \\ \pi x_1 &= \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Det er en løsning til av denne:

$$\pi x_2 = \pi x_1 + 2\pi = \frac{5\pi}{2} \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{5}{2}$$

Du kan også vise ved direkte innsetting:

$$1 + 2\sin\left(\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

d) Dette arealet finner du ved integralet $\int_{x_1}^{x_2} (3 - f(x))\, \mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{5/2} (2 - 2\sin(\pi x))\, \mathrm{d}x &= \left[2x + \frac{2}{\pi}\cos(\pi x)\right]_{1/2}^{5/2} \\ &= \left(\frac{10}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{5}{2}\pi\right)\right) - \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right) \\ &= (5 - 0) - (1 - 0) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Her har vi brukt at $\int \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + K$; dette kan vi vise ved hjelp av *integrasjon med substitusjon*. Sett $u = \pi x$, da blir $\mathrm{d}u = \pi\,\mathrm{d}x$ og $\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}u$.

Oppgave 5

a) Vi får oppgitt at arealet er 8. En formel for arealet av en trekant er $\frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| \cdot \sin(B)$, der det i oppgaveteksten er oppgitt at $|BC| = 2|AB|$ og vinkel $B = 150°$. Kaller vi lengden av AB for x får vi likningen

$$\frac{1}{2}x \cdot 2x \cdot \sin(150°) = 8 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{8}{\sin(150°)} \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{8}{0{,}5}} = 4$$

Dermed blir $AB = x = 4$ og $BC = 2x = 8$. Lengden av den tredje siden kan du finne med cosinussetningen:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos(B) = 4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \frac{-1}{2}\sqrt{3} = 80 + 32\sqrt{3}$$

som gir $|AC| \approx 11{,}64$.

b) Se på en ny trekant med en side $|MB| = 2$, en side $|BC| = 8$ og vinkel $B = 150°$. Ved å bruke cosinussetningen en gang til kan vi finne $|MC|$:

$$|MC|^2 = |MB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |MB| \cdot |BC| \cdot \cos(B) = 2^2 + 8^2 - 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot \frac{-1}{2}\sqrt{3} = 68 + 16\sqrt{3}$$

som gir $|MC| \approx 9{,}78$. Ved å bruke sinusproporsjonen kan vi så finne

$$\frac{\sin(M)}{|BC|} = \frac{\sin(B)}{|MC|} \quad \rightarrow \quad \sin(M) = \frac{\sin(B) \cdot |BC|}{|MC|} = \frac{\sin(150°) \cdot 8}{9{,}78} \approx 0{,}41$$

som gir vinkel $M \approx 24{,}1°$.

Oppgave 6

a) I for-løkka utføres koden i linje 5 gjentatte ganger. Hver gang økes verdien i variabel `s` med `a1*k**(n-1)`, det vil si $a_1 \cdot k^{n-1}$, eller med tallene definert i linje 1 og 2: $1 \cdot 1{,}2^{n-1}$.

Løkka utføres i alt 30 ganger (fra og med $n = 1$ til og med $n = 30$).

b) Verdien av s er en geometrisk rekke, med $a_1 = 1$, $k = 1{,}2$ og $n = 30$, og formelen gir oss

$$s_{30} = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = 1 \cdot \frac{1{,}2^{30} - 1}{1{,}2 - 1} = 1181{,}9$$

(med en desimal).

Oppgave 7

a) Her kan vi bruke *delvis integrasjon*, med grunnformelen $\int u \cdot v'\,\mathrm{d}v = u \cdot v - \int u' \cdot v\,\mathrm{d}v$, der vi kan velge $u = 2x$ og $v' = e^{2x}$. Da får vi

$$u = 2x \quad \rightarrow \quad u' = 2$$

og

$$v' = e^{2x} \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2x} \quad \text{ved substitusjon}$$

og kan bruke formelen:

$$\begin{aligned}
\int 2x \cdot e^{2x}\,\mathrm{d}x &= 2x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int 2 \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= x \cdot e^{2x} - \int e^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= x \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + K
\end{aligned}$$

b) Her kan vi bruke *substitusjon* med $u = x^2$. Først finner vi $\mathrm{d}u$:

$$u = x^2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$$

og så gjennomfører vi integrasjonen (uten grenser):

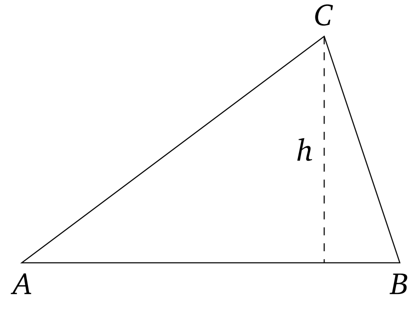
$$\int 2x \cdot e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int 2x \cdot e^{u}\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \int e^{u}\,\mathrm{d}u = e^{u} + K = e^{x^2} + K$$

og til slutt setter vi inn grenser:

$$\int_0^1 2x \cdot e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[e^{x^2}\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e^1 - 1 \approx 1{,}718$$

Oppgave 8

Trekanten kan se slik ut:



a) En måte å finne høyden i trekanten er å gå via formlene for arealet av en trekant:

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \quad \text{og} \quad \Delta ABC = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot h$$

der vi kan finne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [2-1, 2-2, 3-(-1)] = [1, 0, 4] \\
\overrightarrow{AC} &= [1-1, 4-2, -3-(-1)] = [0, 2, -2]
\end{aligned}$$

som gir oss

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|[-8,2,2]| = \frac{1}{2}\sqrt{72} = 3\sqrt{2}$$
$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot h = \frac{1}{2}\sqrt{17} \cdot h$$

Vi kan nå bruke de to arealformlene til å finne høyden:

$$3\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{17} \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{17}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \approx 2{,}06$$

b) En likning for planet har normalvektor $\vec{n}$ parallell med $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-8,2,2]$ (som vi kan skrive som $[4,-1,-1]$), og går gjennom punktet A (eller B eller C). Innsatt i likningen for et plan gir dette

$$\begin{aligned} -4 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) + 1 \cdot (z-(-1)) &= 0 \\ -4(x-1) + (y-2) + (z+1) &= 0 \\ -4x + 4 + y - 2 + z + 1 &= 0 \\ -4x + y + z + 3 &= 0 \\ 4x - y - z - 3 &= 0 \end{aligned}$$

c) For at en linje skal være parallell med et plan må retningsvektoren $\vec{l}$ til linja «stå normalt på normalvektoren» til planet, altså må $\vec{l} \cdot \vec{n} = 0$. Vi finner $\vec{l} = [1,1,3]$ og setter inn:

$$\vec{l} \cdot \vec{n} = [1,1,3] \cdot [-4,1,1] = 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = -4 + 1 + 3 = 0$$

d) Volumet av en trekantet pyramide er gitt som $\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AT}$, der

$$\overrightarrow{AT} = [-3-1, 0-2, 0-(-1)] = [-4,-2,1]$$

og $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ er gitt i oppgave c):

$$ABCT = \frac{1}{6}[-8,2,2] \cdot [-4,-2,1] = \frac{1}{6}(-8 \cdot (-4) + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1) = \frac{30}{6} = 5$$

Oppgave 9

a) $D_g = \mathbb{R} \backslash \{3\}$. Eventuelle nullpunkt når $2x^2 - x + 3 = 0$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{4}$$

som ikke har nullpunkt.

b) Vertikal asymptote: når $x = 3$.

Horisontal asymptote: ingen. Ved polynomdivisjon kan vi skrive om uttrykket til

$$\frac{2x^2 - x + 3}{x - 3} = 2x + 5 + \frac{18}{x - 3}$$

og da ser vi at $\lim_{x \to \infty} g(x)$ ikke eksisterer ($g(x)$ vokser over alle grenser).

Skrå asymptote: fra polynomdivisjonen kan vi hente $y = 2x + 5$ som skrå asymptote.

c) For å finne topp- og bunnpunkt må vi derivere:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{(4x-1)(x-3) - (2x^2 - x + 3) \cdot 1}{(x-3)^2} \\
&= \frac{4x^2 - 12x - x + 3 - 2x^2 + x - 3}{(x-3)^2} \\
&= \frac{2x^2 - 12x}{(x-3)^2} = \frac{2x(x-6)}{(x-3)^2}
\end{aligned}$$

$g'(x)$ har to nullpunkt: $x_1 = 0$ og $x_2 = 6$. For å bestemme om disse er topp- eller bunnpunkt kan vi se på den andrederiverte:

$$\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{(4x-12)(x-3)^2 - (2x^2 - 12x) \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} \\
&= \frac{4(x-3)(x-3)^2 - 2x(x-6)(x-3)}{(x-3)^4} \\
&= \frac{4(x-3)^2 - 4x(x-6)}{(x-3)^3} \\
&= \frac{4(x^2 - 6x + 9) - 4x^2 + 24x}{(x-3)^3} \\
&= \frac{4x^2 - 24x + 36 - 4x^2 + 24x}{(x-3)^3} \\
&= \frac{36}{(x-3)^3}
\end{aligned}$$

Når $x_1 = 0$ får vi $g''(0) = \frac{36}{(-3)^3} = \frac{36}{-27}$ som er negativt, altså et bunnpunkt, med tilhørende y-verdi $y_1 = g(0) = -1$.

Når $x_2 = 6$ får vi $g''(6) = \frac{36}{(3)^3} = \frac{36}{27}$ som er positivt, altså et toppunkt, med tilhørende y-verdi $y_2 = g(3) = 23$

Løsning: Vi har et bunnpunkt i $(6, 23)$ og et toppunkt i $(0, -1)$.

d) Vendepunkt finner vi når $g''(x) = 0$, og sidene telleren er konstant lik 36 kan dette aldri skje. Så $g(x)$ har ingen vendepunkt.

e) Arealet kan vi finne ved integralet

$$\int_4^7 \frac{2x^2 - x + 3}{x - 3}\,\mathrm{d}x = \int_4^7 \left(2x + 5 + \frac{18}{x-3}\right)\mathrm{d}x = \int_4^7 (2x + 5)\,\mathrm{d}x + 18\int_4^7 \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x$$

Det første integralet blir

$$\int_4^7 (2x+5)\,\mathrm{d}x = \left[x^2+5x\right]_4^7 = \left(7^2+5\cdot 7\right)-\left(4^2+5\cdot 4\right) = 49+35-16-20 = 48$$

og det andre kan vi skrive som (flytt 18 utenfor)

$$18\int_4^7 \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x = 18\left[\ln(x-3)\right]_4^7 = 18\cdot(\ln(7-3)-\ln(4-3)) = 18\ln(4)$$

(vi har at $\ln(1)=0$). Samlet får vi

$$\int_4^7 \frac{2x^2-x+3}{x-3}\,\mathrm{d}x = 48+36\ln(2)$$