Løsningsforslag eksamen i matematikk 31 mai 2024

Oppgave 1

Skriv så enkelt som mulig.

a)

$$\frac{4a^2-b^2}{2ab+b^2}+1=\frac{(2a-b)(2a+b)}{b(2a+b)}+1=\frac{2a-b}{b}+1=\frac{2a-b}{b}+\frac{b}{b}=\frac{2a-b+b}{b}=\underline{\underline{\frac{2a}{b}}}$$

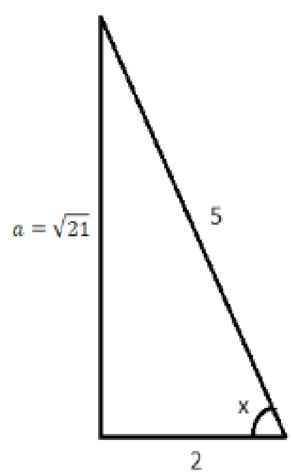
b)

$$\frac{a\cdot\ln b-\ln b^2}{(a-2)\cdot\ln\sqrt{b}}=\frac{a\cdot\ln b-2\ln b}{(a-2)\cdot\ln b^{\frac{1}{2}}}=\frac{\ln b\cdot(a-2)}{(a-2)\cdot\frac{1}{2}\ln b}=\frac{\ln b}{\frac{1}{2}\ln b}=\frac{1}{\frac{1}{2}}\underline{\underline{=2}}$$

Oppgave 2

a)

Gitt $\cos x=\frac{2}{5}$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$. Finn eksaktverdi til: $\sin x$, $\sin 2x$ og $\tan 2x$.



$$a^2+2^2=5^2$$

$$a=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$$

$$\sin x=\underline{\underline{\frac{\sqrt{21}}{5}}}$$

$$\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x = 2\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}\cdot\frac{2}{5} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{21}}{25}}}$$

$$\cos 2x = 2cos^2 x - 1 = 2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 1 = 2\cdot\frac{4}{25} - \frac{25}{25} = \frac{8}{25} - \frac{25}{25} = -\frac{17}{25}$$

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\frac{4\sqrt{21}}{25}}{-\frac{17}{25}} = \frac{\frac{4\sqrt{21}}{25}\cdot 25}{-\frac{17}{25}\cdot 25} = \underline{\underline{-\frac{4\sqrt{21}}{17}}}$$

b)

Gitt funksjonen $r(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$. Finn $\lim\limits_{x\to 2} r(x)$ og $\lim\limits_{x\to 1} r(x)$.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm 1}{2} \qquad \to \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = (x-1)(x-2)$$

$$\lim_{x\to 2} r(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{2^2 - 3\cdot 2 + 2}{2-1} = \frac{0}{1} \underline{\underline{= 0}}$$

$$\lim_{x\to 1} r(x)\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-2) = 1 - 2 \underline{\underline{= -1}}$$

Oppgave 3

Deriver funksjonene og forenkle svarene mest mulig.

a)

$$f(x) = \frac{2\sin x}{x^2}$$

$u = 2\sin x \qquad\qquad u' = 2\cos x$

$v = x^2 \qquad\qquad v' = 2x$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2\cos x \cdot x^2 - 2\sin x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2x(x\cos x - 2\sin x)}{x^4} = \underline{\underline{\frac{2(x\cos x - 2\sin x)}{x^3}}}$$

b)

$$g(x) = \frac{1}{2}\ln(2x^2 - 2x^4)$$

$$u = 2x^2 - 2x^4 \qquad u' = 4x - 8x^3$$

$$g(u) = \frac{1}{2}\ln u \qquad g'(u) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u} = \frac{1}{2u}$$

$$g'(x) = g'(u)\cdot u' = \frac{1}{2u}\cdot(4x - 8x^3) = \frac{4x - 8x^3}{2(2x^2 - 2x^4)} = \frac{4x(1 - 2x^2)}{2\cdot 2x^2(1 - x^2)} = \underline{\underline{\frac{1 - 2x^2}{x(1 - x^2)}}}$$

c)

Finn likningen for tangenten til funksjonen $h(x) = x\ln x$ gjennom punktet $\big(e, h(e)\big)$.

$$h(x) = x\ln x$$

$$u = x \qquad u' = 1$$

$$v = \ln x \qquad v' = \frac{1}{x}$$

$$h'(x) = uv' + u'v = x\cdot\frac{1}{x} + 1\cdot\ln x = \ln x + 1$$

$$y - y_1 = h'(x_1)(x - x_1)$$

$$x_1 = e \qquad y_1 = h(x_1) = e\ln e = e \qquad h'(x_1) = h'(e) = \ln e + 1 = 2$$

$$y - e = 2(x - e)$$

$$y = 2x - 2e + e$$

$$\underline{\underline{y = 2x - e}}$$

Oppgave 4

Løs ulikheten og likningene.

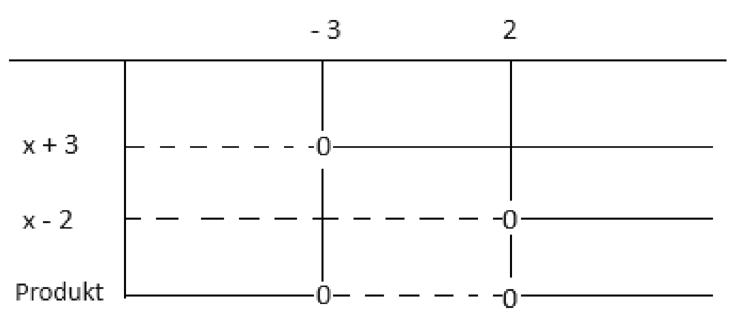
a)

$x^2 + x - 6 \leq 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1(-6)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \quad \rightarrow \quad x_1 = -3 \quad x_2 = 2$

$x^2 + x - 6 = \big(x - (-3)\big)(x - 2) = (x + 3)(x - 2)$



$\underline{\underline{x \in [-3,2]}}$

b)

$\dfrac{18 - 5^x}{5^x} = 5^x + 2$

$\dfrac{18 - 5^x}{5^x} = 5^x + 2 \quad |\cdot 5^x$

$\dfrac{(18 - 5^x)5^x}{5^x} = (5^x + 2)5^x$

$18 - 5^x = (5^x)^2 + 2 \cdot 5^x$

$(5^x)^2 + 3 \cdot 5^x - 18 = 0$

$u = 5^x$

$u^2 + 3 \cdot u - 18 = 0$

$$u = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1(-18)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 9}{2} \qquad \rightarrow \qquad u_1 = 3 \qquad u_2 = -6$$

$5^x = 3 \qquad\qquad 5^x = -6$

$\ln 5^x = \ln 3 \qquad\qquad \emptyset$

$x \ln 5 = \ln 3$

$$\underline{\underline{x = \frac{\ln 3}{\ln 5}}}$$

c)

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin(2\pi x)} - 2 = 0, \qquad x \in [0, 1]$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin(2\pi x)} = 2$$

$\sqrt{3} = 2\sin(2\pi x)$

$$\sin(2\pi x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2\pi x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$2\pi x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$2\pi x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$2\pi x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3 \cdot 2\pi} + \frac{k2\pi}{2\pi}$$

$$x = \frac{2\pi}{3 \cdot 2\pi} + \frac{k2\pi}{2\pi}$$

$$x = \frac{1}{6} + k$$

$$x = \frac{1}{3} + k$$

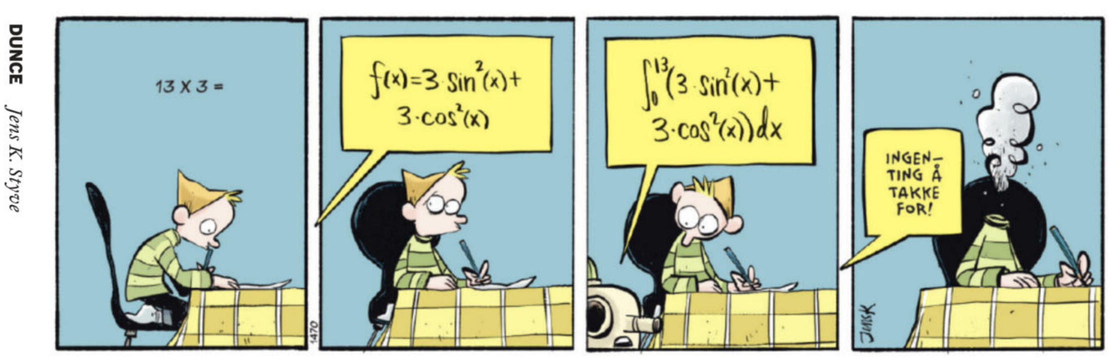
$$x = \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6} \qquad\qquad x = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{6} \qquad x = \frac{1}{3}}}$$

Oppgave 5

a)

I tegneseriestripen under skal en gutt regne ut $13 \cdot 3$. Han får «hjelp» av en robot.
Forklar hvorfor robotens innspill gir rett svar.



$$\int_0^{13}(3sin^2x+3cos^2x)dx=3\int_0^{13}(sin^2x+cos^2x)dx=3\int_0^{13}1\cdot dx=3[x]\begin{matrix}13\\0\end{matrix}=3(13-0)$$

$$\underline{\underline{=13\cdot 3}}$$

Løs integralene.

b)

$$\int 3(x^2+4x+4)dx=3\int(x^2+4x+4)dx=3\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{2}x^2+4x\right)+C\ \underline{\underline{=x^3+6x^2+12x+C}}$$

c)

$$\int\frac{3}{x^2+4x+4}dx=\int\frac{3}{(x+2)^2}dx=\int\frac{3}{u^2}du=3\int u^{-2}du=\frac{3}{-2+1}u^{-2+1}+C$$
$$=-3u^{-1}+C$$

$$u=x+2$$

$$=\frac{-3}{u}+C=\underline{\underline{\frac{-3}{x+2}}}+C$$

$$\frac{du}{dx}=1$$

$$dx=du$$

d)

$$\int_{-3}^{-1}\frac{x+2}{x^2+4x}dx=\frac{1}{2}\int_{-3}^{-1}\frac{2x+4}{x^2+4x}dx=\frac{1}{2}[\ln|x^2+4x|]\begin{matrix}-1\\-3\end{matrix}$$

$$=\frac{1}{2}(\ln|(-1)^2+4(-1)|-\ln|(-3)^2+4(-3)|)=\frac{1}{2}(\ln|1-4|-\ln|9-12|)$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 3)\ \underline{\underline{=0}}$$

Oppgave 6

Gitt funksjonen

$$f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 4x - \frac{5}{2}$$

a)

Vis at $x = -\frac{1}{2}$ er et nullpunkt for f, og finn evt. andre nullpunkter.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2} = 4\left(-\frac{1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) - 4\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{4}{2} - \frac{5}{2} = 0$$

$$\left(4x^3 + 4x^2 - 4x - \tfrac{5}{2}\right) : \left(x + \tfrac{1}{2}\right) = 4x^2 + 2x - 5$$

$$\underline{-(4x^3 + 2x^2)}$$

$$2x^2 - 4x$$

$$\underline{2x^2 + \ x}$$

$$-5x - \frac{5}{2}$$

$$\underline{-5x - \frac{5}{2}}$$

$$0$$

$$4x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4(-5)}}{2 \cdot 4} = \frac{-2 \pm \sqrt{84}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{21}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{4}$$

$$\underline{\underline{Nullpunkter: \quad \frac{-1 - \sqrt{21}}{4}, -\frac{1}{2}\ og\ \frac{-1 + \sqrt{21}}{4}}}$$

b)

Finn eventuelle ekstremalpunkter på grafen til f ved regning, og drøft funksjonens monotoniegenskaper.

$$f'(x) = 12x^2 + 8x - 4 = 0$$

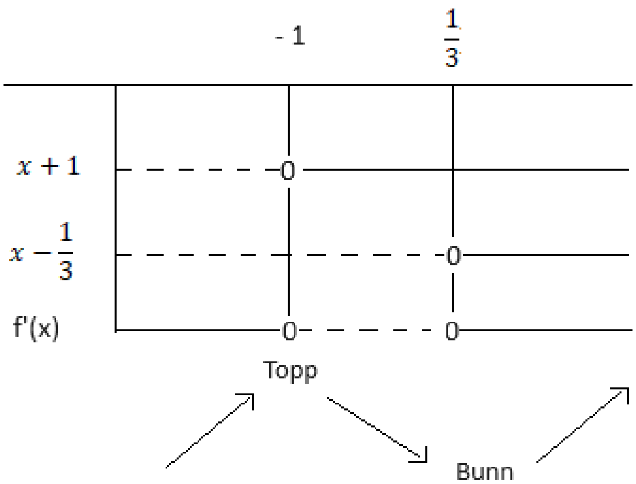
$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3(-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = \frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{Ekstremalpunkter\ x = -1\ og\ x = \frac{1}{3}}}$$

$$f'(x) = 12(x+1)(x - \frac{1}{3})$$



$$\underline{\underline{Funksjonen\ stiger\ når\ x \in \langle \leftarrow, -1\rangle \ \cup \ \langle \frac{1}{3}, \rightarrow \rangle}}$$

$$\underline{\underline{Funksjonen\ synker\ når\ x \in \langle -1, \frac{1}{3}\rangle}}$$

c)

Finn likningen for normalen til f der grafen skjærer y-aksen.

$$f(0) = 4 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

$x_1 = 0$ $\qquad y_1 = f(x_1) = f(0) = -\frac{5}{2}$ $\qquad f'(x_1) = 12 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 - 4 = -4$

$$y - \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{-4}(x - 0)$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{2}}}$$

Oppgave 7

Punktene $A(1,1,0)$, $B(2,4,0)$ og $C(2,2,4)$ danner hjørnene i trekanten ABC.

a)

Finn vinkel A i trekanten.

$\overrightarrow{AB} = [2-1, 4-1, 0-0] = [1,3,0]$

$\overrightarrow{AC} = [2-1, 2-1, 4-0] = [1,1,4]$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{10}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = [1,3,0] \cdot [1,1,4] = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 4$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{4}{\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{2}} \qquad \rightarrow \qquad A = cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{2}} \underline{\underline{= 72.65°}}$$

b)

Finn arealet av trekanten ABC.

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \sin A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sin 72.65° \underline{\underline{= 6.40}}$$

c)

Finn en likning og en parameterframstilling til planet β gjennom punktene A, B og C.

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \overrightarrow{e_x}(3 \cdot 4 - 0 \cdot 1) - \overrightarrow{e_y}(1 \cdot 4 - 0 \cdot 1) + \overrightarrow{e_z}(1 \cdot 1 - 3 \cdot 1) = [12, -4, -2]$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [12, -4, -2] = 2[6, -2, -1] \qquad \vec{n} = [6, -2, -1]$

$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1)$

$6(x-1) - 2(y-1) - 1(z-0) = 0$

$6x - 6 - 2y + 2 - z = 0$

$6x - 2y - z - 4 = 0$

$$\beta = \begin{cases} x = 1 + 1s + 1t \\ y = 1 + 3s + 1t \\ z = 0 + 0s + 4t \end{cases} = \begin{cases} x = 1 + \ \ s + \ t \\ y = 1 + 3s + t \\ z = \qquad\quad 4t \end{cases}$$

d)

Et punkt D ligger på y-aksen. Finn koordinatene til D slik at $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$.

$D(0, y, 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} = [-1, y - 1{,}0]$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC} = [0, -2{,}4]$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$[-1, y - 1{,}0] \cdot [0, -2{,}4] = 0$

$-1 \cdot 0 + (y - 1) \cdot (-2) + 0 \cdot 4 = 0$

$-2y + 2 = 0$

$-2y = -2$

$y = 1$

$\underline{\underline{D(0{,}1{,}0)}}$

e)

Et punkt E er gitt slik at $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$. Finn koordinatene til punktet E.

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = 2[1{,}3{,}0] - [0, -2{,}4] = [2{,}6{,}0] - [0, -2{,}4] = [2 - 0{,}6 - (-2), -4]$

$= [2{,}8{,}0]$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = [1{,}1{,}0] + [2{,}8, -4] = [3{,}9, -4] \qquad \rightarrow \qquad \underline{\underline{E(3{,}9, -4)}}$

Oppgave 8

Gitt en aritmetisk følge med $a_1 = \frac{1}{3}$ og $d = \frac{5}{3}$. Programkoden under regner ut den minste verdien av n som er slik at $a_n \geq 200$.

```
1 a1 = 1/3
2 d = 5/3
3 n = 1
4 an = a1
5 while an < 200:
6     an = an + ?
7     n =   ?
8 print(f"n = {n}, an = {an}")
```

a)

Hva skal stå i boksene på linje 6 og 7? Forklar hva som skjer i while-løkken.

Linje 6: an = an + d

Linje 7: n = n + 1

While-løkken legger til d (differansen) i det aktuelle leddet i følgen, og øker indeksen n med 1.

b)

Finn verdien av n som programmet regner ut.

Vi vil ha n-verdien som gir $a_n \geq 200$. Siden ledd n er $a_n = a_1 + (n-1)d$, får vi

$$a_1 + (n-1)d \geq 200$$

$$n \geq \frac{200 - \frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} + 1$$

$$n \geq \frac{599}{5} + 1$$

$$n \geq 120{,}8$$

Altså må $n \geq 121$. Programmet gir dermed $n = 121$.

Oppgave 9

Du har fått utlevert 100 m gjerde, og skal gjerde inn et kvadratisk område og et sirkelformet område. Kvadratet har sidekant x og sirkelen har radius r.

a)

Vis at $x = 25 - \frac{1}{2}\pi r$.

$$4x + 2\pi r = 100$$

$$4x = 100 - 2\pi r$$

$$x = \frac{100}{4} - \frac{2\pi r}{4} = \underline{\underline{25 - \frac{1}{2}\pi r}}$$

b)

Finn den verdien av r som gir så lite samlet areal som mulig. Hva er verdien av x da?

$$A(r) = x^2 + \pi r^2 = \left(25 - \frac{1}{2}\pi r\right)^2 + \pi r^2$$

$$A'(r) = 2\left(25 - \frac{1}{2}\pi r\right)\left(-\frac{1}{2}\pi\right) + 2\pi r = 2\left(-\frac{25}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi^2 r\right) + 2\pi r = \frac{1}{2}\pi^2 r + 2\pi r - 25\pi$$

$$A''(r) = \frac{1}{2}\pi^2 + 2\pi$$

$$A'(r) = 0$$

$$-25\pi + \frac{1}{2}\pi^2 r + 2\pi r = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\pi^2 + 2\pi\right) r = 25\pi$$

$$r = \frac{25\pi}{\frac{1}{2}\pi^2 + 2\pi} = \frac{50\pi}{\pi^2 + 4\pi} = \frac{50\pi}{(\pi + 4)\pi} = \frac{50}{\pi + 4}$$

$$A''\left(\frac{50}{\pi + 4}\right) = \frac{1}{2}\pi^2 + 2\pi > 0 \quad minpunkt$$

$$\underline{\underline{Minst\ areal\ når\ r = \frac{50}{\pi + 4} m}}$$

$$x = \frac{1}{2}\pi r = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{50}{\pi + 4} = \underline{\underline{\frac{25\pi}{\pi + 4} m}}$$

c)

Størst mulig areal får vi ved kun å lage en sirkel (dvs. $x = 0$). Hvor mange prosent større areal får du da enn om du kun lager et kvadrat?

$O = 2\pi r$

$2\pi r = 100$

$r = \frac{100}{2\pi} = \frac{50}{\pi}$

$$Areal\ sirkel = \pi r^2 = \pi \left(\frac{50}{\pi}\right)^2 = \frac{2500}{\pi}$$

$$Areal\ kvadrat = \frac{100}{4} \cdot \frac{100}{4} = 25 \cdot 25 = 625$$

$$Økning\ \ av\ areal: \frac{2500}{\pi} - 625$$

$$Prosentøkning: \frac{\frac{2500}{\pi} - 625}{625} \cdot 100\% \underline{\underline{= 27.3\%}}$$