EKSAMENSSAMARBEIDENDE FORKURSINSTITUSJONER

Forkurs for 3-årig ingeniørutdanning og integrert masterstudium i teknologiske fag og tilhørende halvårig realfagskurs.

Universitetet i Sørøst-Norge, OsloMet, Høgskulen på Vestlandet, Høgskolen i Østfold, NTNU, Universitetet i Agder, Universitetet i Stavanger, UiT-Norges arktiske universitet, NKI, Metis.

Eksamensoppgave

LØSNINGSFORSLAG

MATEMATIKK

Bokmål

7. august 2023

kl. 9.00-14.00

Oppgave 1

a)

$$(a^2)^2 \cdot a^{-3} \cdot \left(b^{-\frac{1}{2}} \cdot a\right)^3 b^2$$
$$= a^{4-3+3} \cdot b^{-\frac{3}{2}+2}$$
$$= a^4\sqrt{b}$$

b)

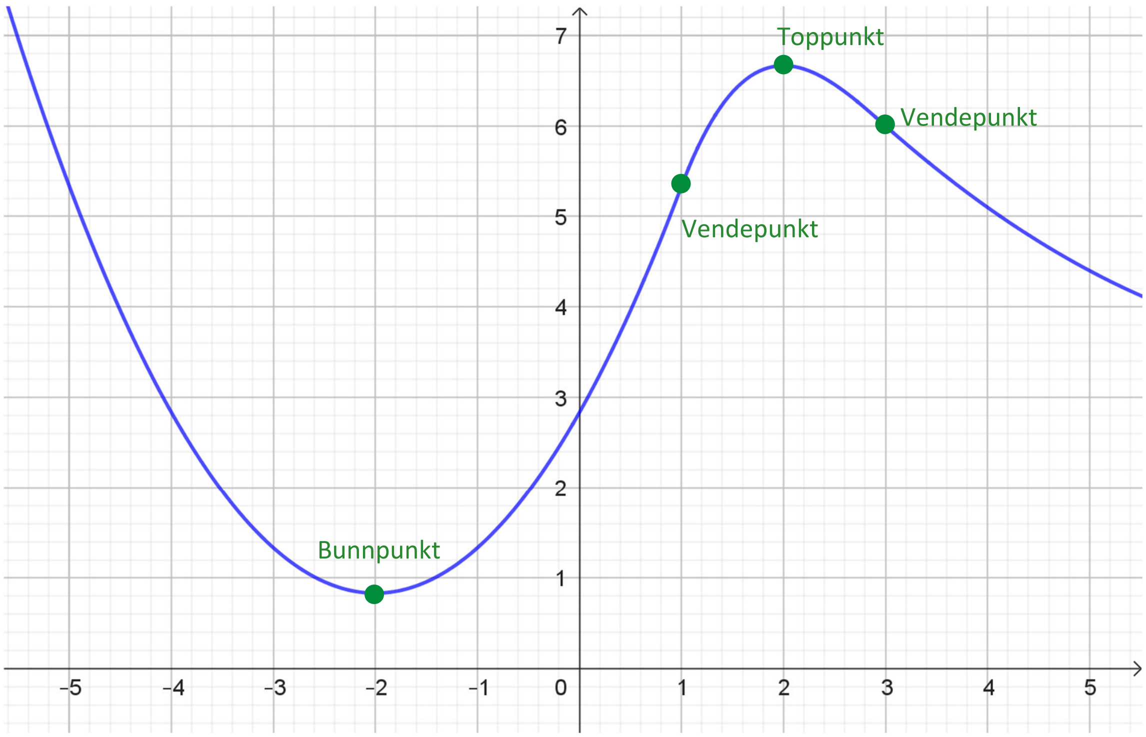
$$\frac{2}{x-2} - \frac{x-4}{x^2-5x+6}$$
$$= \frac{2(x-3)}{(x-2)(x-3)} - \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}$$
$$= \frac{x-2}{(x-2)(x-3)}$$
$$= \frac{1}{x-3}$$

c)

$$\lg x + \lg x^{-2} - \lg \frac{1}{x^3} - \lg \sqrt{x}$$
$$= \lg\left(\frac{x \cdot x^{-2}}{x^{-3}x^{\frac{1}{2}}}\right)$$
$$= \lg x^{1-2+3-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{3}{2}\lg x$$

Oppgave 2

Fra informasjonen som er gitt ser vi at f alltid skal ligge over x-aksen. Videre er f minkende for $x \in \langle \leftarrow, -2\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$. Grafen skal ha stasjonære punkter for $x = -2$ og $x = 2$, og vendepunkter for $x = 1$ og for $x = 3$. Dette utelukker ikke at det kan finnes andre minkende intervaller, stasjonære punkter eller vendepunkter, men en mulig graf for f er skissert under.



Oppgave 3

a) $\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{4}{x} = 1$

$$x + 4(x-3) = x(x-3)$$
$$x + 4x - 12 = x^2 - 3x$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$x = 2 \;\lor\; x = 6$$

b) $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 = 6\ln x$

$$2u^3 - u^2 - 6u = 0$$
$$u(2u^2 - u - 6) = 0$$
$$u = 0 \;\lor\; u = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 7}{4}$$

$$u \in \left\{-\frac{3}{2}, 0, 2\right\}$$

Da er altså

$$\ln x \in \left\{-\frac{3}{2}, 0, 2\right\}$$

slik at

$$x \in \left\{e^{-\frac{3}{2}}, 1, e^{2}\right\}.$$

Oppgave 4

a) $P(1) = 1 + 2 - 7 + 4 = 0$, så $x = 1$ er nullpunkt for P.

Da må $(x - 1)$ være en faktor i P.

b) Faktoriser P så mye som mulig.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 - 7x + 4) : (x - 1) = x^2 + 3x - 4 \\
\underline{(x^3 - x^2)} \\
\quad 3x^2 - 7x \\
\underline{\quad 3x^2 - 3x} \\
\qquad -4x + 4 \\
\underline{\qquad -4x + 4} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Da kan vi skrive $P(x) = \left(x^2 + 3x - 4\right)(x - 1)$.

Faktoriserer videre: $x^2 + 3x - 4$ har nullpunkter $x = -4$ og $x = 1$, så

$$P(x) = (x + 4)(x - 1)(x - 1) = (x + 4)(x - 1)^2.$$

Oppgave 5

a) ΔABD er en likebent trekant da den siste vinkelen er 30°. Ved å halvere $\angle A$ deles trekanten i to. Dermed blir:

$\frac{1}{2}BD = 7\cos 30^\circ = \frac{7}{2}\sqrt{3}$.

Slik at $\underline{\underline{BD = 7\sqrt{3}.}}$

b) Siden $BD = BC$, og $\angle CBD = 60^\circ$ så er ΔBCD en likesida trekant. Dermed er også $CD = 7\sqrt{3}$. Omkretsen blir da:

Omkrets = $7 + 7\sqrt{3} + 7\sqrt{3} + 7 = 14 + 14\sqrt{3}$

c) For ΔABD: Høyde blir $7 \cdot \sin 30^\circ = \frac{7}{2}$. Areal blir da: $\frac{7\sqrt{3}\cdot 7/2}{2} = \frac{49}{4}\sqrt{3}$.

For ΔBCD: Høyde blir $7\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 7\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\cdot 7}{2}$. Areal: $\frac{7\sqrt{3}\cdot\frac{3\cdot 7}{2}}{2} = \frac{3\cdot 49}{4}\sqrt{3}$.

Tilsammen gir dette arealet: $\frac{49}{4}\sqrt{3} + \frac{3\cdot 49}{4}\sqrt{3} = \underline{\underline{49\sqrt{3}}}$

Oppgave 6

a) $\overrightarrow{AB} = [-3, 4, 0]$.

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$

$\overrightarrow{AC} = [-3, 0, 2]$.

$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 2^2} = \underline{\underline{\sqrt{13}}}$

b) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = [8, 6, 12] = 2[4, 3, 6]$.

Areal: $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{2}{2}\sqrt{4^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 9 + 36} \underline{\underline{= \sqrt{61} \approx 7.81}}$

Vinkelen kan nå finnes fra sinussetningen, eller ved å bruke skalarproduktet.

Hvis en bruker skalarproduktet:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos\angle A$$

$$9 = 5 \cdot \sqrt{13}\cos\angle A$$

$$\cos\angle A = \frac{9}{5\sqrt{13}}$$

$$\underline{\underline{\angle A = 60.1^\circ}}$$

c) Siden $ABCD$ er et parallellogram vil $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Da blir:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB} = [0,0,2] - [-3,4,0] = [3,-4,2].$$

Dermed$\underline{\underline{: D = (3,-4,2)}}$

Arealet til parallellogrammet er det dobbelte av arealet til ΔABC. Så arealet er $\underline{\underline{2\sqrt{61}}}$

Vi får $\overrightarrow{AD} = [0,-4,2]$ og $\overrightarrow{AB} = [t-3,t,t]$.

Regner ut trevektorproduktet:

$$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AT} = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ t-3 & t & t \end{vmatrix} = -3(-4-2t) - 4\big(-2(t-3)\big) = 26t - 24 = 2(13t-12).$$

Da blir volumet (som vi setter lik 10):

$$V = \frac{1}{2}|2(13t-12)| = \frac{2}{3}|13t-12| = 10.$$

$$\Rightarrow |13t-12| = 15.$$

$$\Rightarrow 13t - 12 = \pm 15$$

$$\Rightarrow t = \frac{12 \pm 15}{13}$$

$$\Rightarrow t = \frac{27}{13} \vee t = -\frac{3}{13}$$

Oppgave 7

a) Funksjonen er allerede gitt på formen $f(x) = A\sin(cx + \varphi_0) + d$. Da har vi:

Likevektslinje: $\underline{\underline{d = 1}}$

Amplitude: $\underline{\underline{A = \sqrt{2}}}$

Periode: $p = \frac{2\pi}{2} \underline{\underline{= \pi.}}$

b) Nullpunkter: $f(x) = 0$.

$$\sqrt{2}\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$$

$$\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \vee 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \vee 2x = -\pi + 2\pi k$$

$$\underline{\underline{x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \vee x = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}}}$$

c) Toppunkter når $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$:

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \pi k.$$

Toppunkter: $\underline{\underline{\left(\frac{\pi}{8} + \pi k, 1 + \sqrt{2}\right), \ k \in \mathbb{Z}}}$

Bunnpunkter når $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$:

$$2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = -\frac{3\pi}{8} + \pi k.$$

Bunnpunkter: $\underline{\underline{\left(-\frac{3\pi}{8} + \pi k, 1 - \sqrt{2}\right), \ k \in \mathbb{Z}}}$

Oppgave 8

a) Kvotienten er $k = e^{-x}$. Rekka konvergerer når $-1 < k < 1$. Siden $e^{-x} > 0$, gir dette konvergenskriteriet:

$$e^{-x} < 1 \Rightarrow -x < \ln 1 = 0$$

Dermed vil rekka konvergere når: $\underline{\underline{x > 0}}$.

b) Summen er (som vi setter lik 3):

$$S(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-e^{-x}} = 3$$

$$1 = 3(1 - e^{-x})$$

$$3e^{-x} = 2$$

$$\underline{\underline{x = \ln\frac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2.}}$$

Oppgave 9

a) Her trenger vi polynomdivisjon. Merk at vi mangler førstegradsledd, så det må settes av plass til.

$$(x^2 + 0 \cdot x - 4) : \ (x+5) \ = \ x - 5 + \frac{21}{x+5}$$

$$\underline{(x^2 + 5x)}$$

$$-5x - 4$$

$$\underline{-5x - 25}$$

$$21$$

Da er

$$\int f(x)\,dx = \int \left(x - 5 + \frac{21}{x+5} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 21 \cdot \ln|x+5| + C$$

b)

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \left(x - 5 + \frac{21}{x+5}\right) dx$$

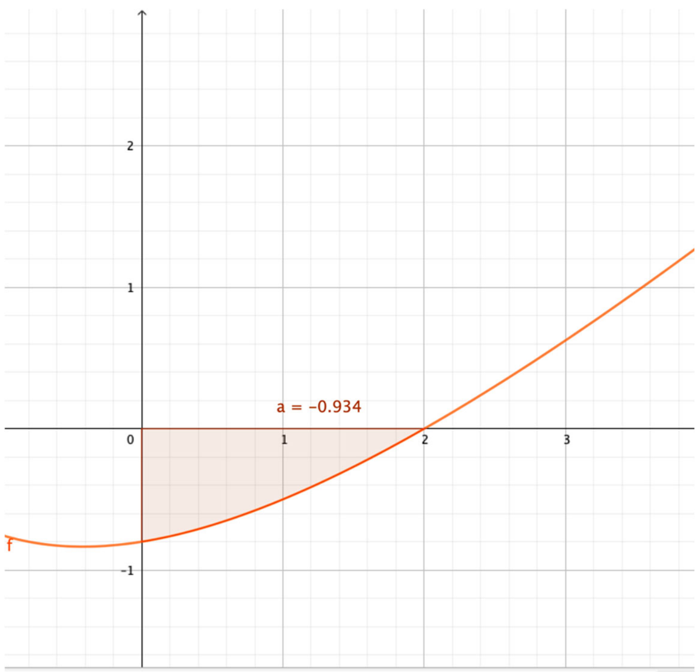
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - 5x + 21 \cdot \ln|x+5| + C\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot 4 - 10 + 21\ln 7\right) - 21\ln 5$$

$$= -8 + 21\ln\frac{7}{5}$$

$$\approx -0{,}934$$

Arealet blir derfor $\underline{\underline{8 - 21\ln 7 + 21\ln 5 \approx 0{,}934}}$



c)

$f(0) = -5 + \frac{21}{5} = -\frac{4}{5}$.

Deriverer:

$f'(x) = 1 - \frac{21}{(x+5)^2}$.

$f'(0) = 1 - \frac{21}{5^2} = \frac{4}{25}$.

Bruker ettpunktsformelen:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

$$y - \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{25}(x - 0)$$

Tangenten igjennom $\left(0, f(0)\right)$ har derfor ligningen:

$$\underline{\underline{y = \frac{4}{25}x - \frac{4}{5}}}$$