EKSAMENSSAMARBEIDENDE FORKURSINSTITUSJONER
Forkurs for 3-årig ingeniørutdanning og integrert masterstudium i teknologiske fag og tilhørende halvårig realfagskurs.
Universitetet i Sørøst-Norge, OsloMet, Høgskulen på Vestlandet, Høgskolen i Østfold, NTNU, Universitetet i Agder, Universitetet i Stavanger, UiT-Norges arktiske universitet, NKI, Metis.

Eksamensoppgave

LØSNINGSFORSLAG

MATEMATIKK

Bokmål

15. mai 2023

kl. 9.00-14.00

Hjelpemidler:

Godkjente formelsamlinger i matematikk og fysikk
Godkjent enkel kalkulator

Andre opplysninger:

Oppgavesettet består av 4 sider medregnet forsiden, og inneholder 9 oppgaver.

Ved vurdering teller alle deloppgaver likt.

Oppgave 1

Løs likningene.

a) $(x-2)(x+3)=6$

$$x^2+x-6=6$$

$$x^2+x-12=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 12}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}$$

$$x=-4 \ \lor \ x=3$$

b) $5\tan x=-3,\ x\in[-\pi,\pi]$

$$\tan x=-\frac{3}{5}$$

$$x=-0{,}54 \lor \ x=\pi+(-0{,}54)$$

$$x=-0{,}54 \lor \ x=2{,}60$$

c) $2+3e^{-x}=e^{x}$

$$2e^x+3=e^{2x}$$

$$(e^x)^2-2e^x-3=0$$

$$e^x=3 \ \lor \ e^x=-1$$

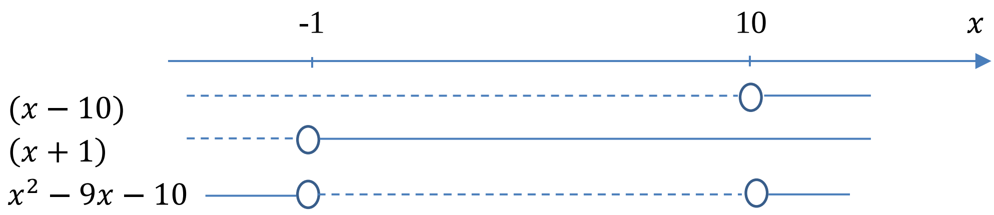
Eneste mulige løsning er $e^x=3$, som gir $x=\ln 3$.

Oppgave 2

Løs ulikhetene.

a) $x^2-9x-10\geq 0$

$$(x-10)(x+1)\geq 0$$

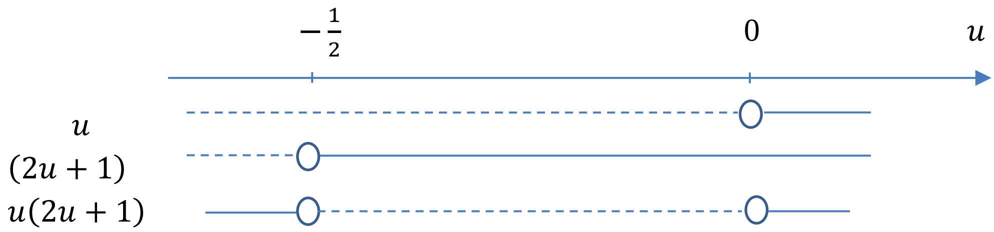


Ser av skjemaet at ulikheten har løsning $x \leq -1 \vee x \geq 10$.

b) $2\cos^2 t + \cos t < 0,\ \ t \in [0, 2\pi\rangle$
Vi setter $u = \cos t$.

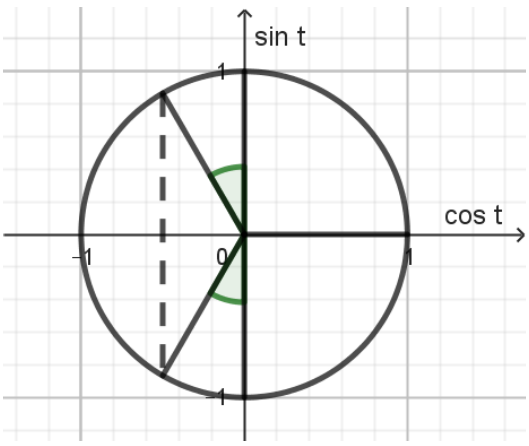
$$2u^2 + u < 0$$

$$u(2u+1) < 0$$



Dermed må vi ha $-\frac{1}{2} < \cos t < 0$.

I enhetssirkelen ser vi at dette skjer i to intervaller per omløp:



Løsninger er dermed $\frac{\pi}{2} < t < \frac{2\pi}{3}$ og $\frac{4\pi}{3} < t < \frac{3\pi}{2}$.

Oppgave 3

a) Kan løses ved delvis integrasjon med $v = \ln x$.

$$\int 2x \cdot \ln x \, dx = \int u'v \, dx = uv - \int u \, v' \, dx$$
$$= x^2 \ln x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$$
$$= x^2 \ln x - \int x dx$$
$$= x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + C$$

b) Vi bruker variabelskifte med $u = x^2$ slik at $du = 2x \, dx$.

$$\int 6x \cdot e^{x^2} dx = \int 3e^u du = 3e^u + C = 3e^{x^2} + C$$

c) Vi kan bruke delbrøkoppspalting, siden nevner kan skrives som førstegrads faktorer.

$$\frac{4}{9x^2 - 1} = \frac{4}{(3x)^2 - 1} = \frac{4}{(3x+1)(3x-1)} = \frac{A}{3x+1} + \frac{B}{3x-1}$$

Multipliserer med fellesnevner:

$$4 = A(3x - 1) + B(3x + 1)$$

Med $x = -\frac{1}{3}$ får vi

$$4 = -2A$$
$$A = -2$$

Med $x = \frac{1}{3}$ får vi

$$4 = 2B$$
$$B = 2$$

Dermed er

$$\int \frac{4}{9x^2 - 1} dx = \int \left(-\frac{2}{3x+1} + \frac{2}{3x-1} \right) dx$$
$$= -\frac{2}{3} \ln|3x + 1| + \frac{2}{3} \ln|3x - 1| + C$$
$$= \frac{2}{3} (\ln|3x - 1| - \ln|3x + 1|) + C$$
$$= \frac{2}{3} \ln \left| \frac{3x - 1}{3x + 1} \right| + C$$

I integrasjonen brukte vi variabelskifte med nevner som u, slik at $du = 3dx$ og dermed $dx = \frac{1}{3} du$.

Vi bruker regelen $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ til å sette sammen de to leddene med logaritmer til ett ledd.

Oppgave 4

Gitt funksjonen

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3}$$

a) Nullpunkt: $f(x) = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$
Vertikale asymptoter for $\frac{P(x)}{Q(x)}$ for verdier av x der $Q(x) = 0$ samtidig som $P(x) \neq 0$.
Det gir en vertikal asymptote: $x = -3$.
Denne funksjonen har horisontal asymptote når $x \to \pm\infty$.
Vi kan skrive $f(x) = \frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}}$ så når $x \to \pm\infty$ vil $f(x) \to 1$.
Horisontal asymptote $y = 1$.

b) Deriverer: $f'(x) = \frac{1\cdot(x+3)-(x-2)\cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{5}{(x+3)^2}$
For at $f'(x) = 5$ må dermed $(x+3)^2 = 1$, som gir

$$x = -4 \lor x = -2$$

Da kan vi finne konstantledd b for alle tangenter med stigningstall 5: Likninga $y = ax + b$ gir

$f(-4) = 5 \cdot (-4) + b$, slik at $b = 26$, eller

$f(-2) = 5 \cdot (-2) + b$, slik at $b = 6$.

Tangentene har dermed likninger $y = 5x + 26$ og $y = 5x + 6$.

c) Finner skjæringspunktene mellom grafene:

$$\frac{x-2}{x+3} = x - 2$$
$$x - 2 = x^2 + x - 6$$
$$x = \pm 2$$

Siden $f(0) = -\frac{2}{3}$ og $y = -2$ på linja når $x = 0$, er f den øverste i koordinatsystemet av de to grafene.
Arealet er dermed

$$\int_{-2}^{2} (f(x) - y)\, dx = \int_{-2}^{2} \frac{-x^2+4}{x+3}\, dx$$

Ved polynomdivisjon finner vi at

$$\frac{-x^2+4}{x+3} = -x + 3 - \frac{5}{x+3}.$$

Dermed er

$$\int_{-2}^{2} (f(x) - y)\, dx = \int_{-2}^{2} \left(-x + 3 - \frac{5}{x+3}\right) dx$$
$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5\ln|x+3|\right]_{-2}^{2}$$
$$= 12 - 5\ln 5$$

Oppgave 5

a) For hvert minutt endrer flyet sin posisjon målt i km gitt av vektoren $[-8,\ 6,\ 0{,}2]$. Dermed er flyets fart lik $\sqrt{8^2 + 6^2 + 0{,}2^2}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = 10{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = 600\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Vi kan også tolke fart som bakkehastighet, dvs. vi ser bort fra bevegelse i høyderetning. Da får vi $\sqrt{8^2 + 6^2}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = 10{,}0\ \frac{\text{km}}{\text{min}} = 600\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Vi setter $x = 0$ og får $8t = 40$ slik at $t = 5$. Da er $y = 30 - 10 = 20$, og $z = 3$, så flyet har posisjon $(0{,}20{,}3)$, 5 minutter etter $t = 0$. Da er flyet altså 3 km over bakken.

c) Avstand mellom (x_1, y_1, z_1) og (x_2, y_2, z_2) er lik $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Med det kan vi finne en funksjon som gir avstand mellom flyene til enhver tid:

$$s(t) = \sqrt{(40 - 8t - 6t)^2 + (6t - 10 - 5t)^2 + \big(2 + 0{,}2t - (3 - 0{,}5t)\big)^2}$$

Verdien av $s(t)$ må være på sitt laveste når uttrykket under kvadratrota er på sitt laveste. Vi finner derfor evt. bunnpunkt på funksjonen

$$f(t) = (40 - 14t)^2 + (t - 10)^2 + (0{,}7t - 1)^2$$

Det gjør vi ved å derivere:

$$f'(t) = 2(40 - 14t) \cdot (-14) + 2(t - 10) + 2(0{,}7t - 1) \cdot 0{,}7$$

$f'(t) = 0$ når $196t + t + 0{,}49t = 560 + 10 + 0{,}7$. Det gir $12{,}3t = 29$, så vi får

$$t = 2{,}89.$$

Etter 2,89 minutter, eller ca 2 min 53 sek, er avstanden minst.

Oppgave 6

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x$$

a) Nullpunkt: $e^{2x} - 2e^x = 0$

$$e^x(e^x - 2) = 0$$

$$e^x = 0 \quad eller \quad e^x = 2$$

Bare ett nullpunkt: $x = \ln 2$

b) Eventuelle topp- og bunnpunkter:

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 0$$
$$2e^x(e^x - 1) = 0$$

Én løsning: $x = 0$. Siden $f''(0) > 0$, så er $\big(0, f(0)\big) = (0, -1)$ et bunnpunkt

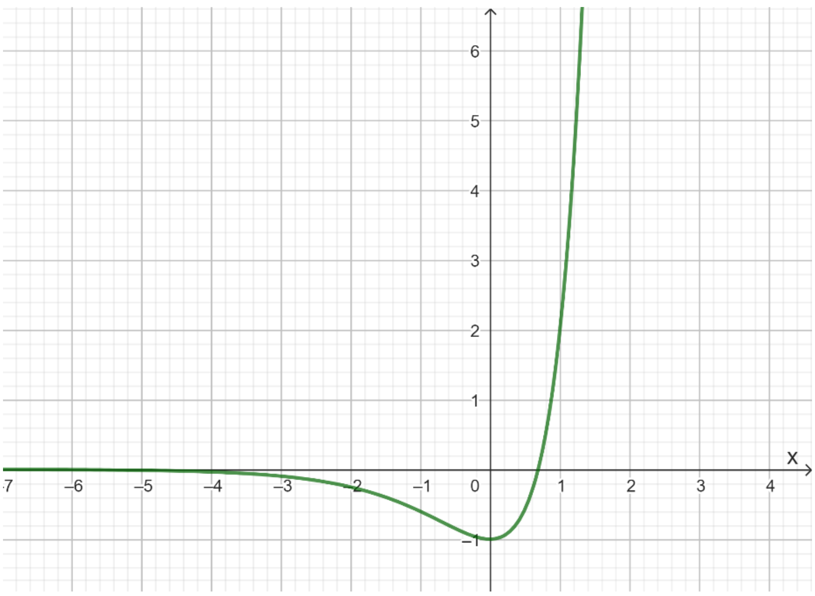
c) Vendepunkter:

$$f''(x) = 4e^{2x} - 2e^x = 0$$
$$2e^x(2e^x - 1) = 0$$

Én løsning: $2e^x - 1 = 0$
$$e^x = \frac{1}{2}$$
$$x = ln\frac{1}{2} = -ln2$$

Vendepunkt: $\big(-ln2, f(-ln2)\big) = (-ln2,\ -\frac{3}{4})$

d) Graf til f:



Oppgave 7

a) Sirkelens radius:

$A = \frac{1}{2}r^2 sin45°$

$3\sqrt{2} = \frac{1}{2}r^2\frac{\sqrt{2}}{2}$

$12 = r^2 \quad r = 2\sqrt{3}$

b) Areal av trekant ABC:

$\angle ASC = 135°$

$\Delta ASC: \quad Areal = \frac{1}{2}r^2 sin135° = 3\sqrt{2}$

$\Delta ABC:\ 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

(Grunnlinje fordobles, høyden forblir den samme).

Oppgave 8

$\Delta ABC:\ A(1,3,2), B(2,1,4)$ og $C(3,2,0)$.

a) $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} = [-1,2,-2]$
$\overrightarrow{BC} = [1,1,-4]$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = 3\sqrt{2}$$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos B$

$$-1 + 2 + 8 = 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos B$$
$$\angle B = 45°$$

b) ΔABC ligger i et plan. Bestem likningen for dette planet.

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = [-6,-6,-3] = -3[2,2,1]$$

Bruker punkt C:

$$2(x-3) + 2(y-2) + 1(z-0) = 0$$
$$2x + 2y + z - 10 = 0$$

Oppgave 9

a) Vi utnytter at $s_3 = s_2 + a_3$.

Summene $s_2 = 3 \cdot 4 + 8 = 20$ og $s_3 = 3 \cdot 9 + 12 = 39$.

Vi får $a_3 = s_3 - s_2 = 39 - 20 = 19$.

b) Gitt en aritmetisk rekke hvor summen av de 10 første leddene er lik 400, og summen av de neste 10 leddene er 1000. Bestem differansen d og det første leddet i rekka.

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$$

Vi får to likninger:

$$400 = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10$$
$$1400 = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 10$$

Løser vi likningssettet får vi $d = 6$ og $a_1 = 13$.