Løsningsforslag

Eksamen matematikk 8. august 2022

Forkurs for ingeniørutdanningen

Oppgave 1

Vi definerer $P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$.

a) Siden $P(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 0$ er $(x-1)$ en faktor i $P(x)$.
Og, siden $P(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 8 - 16 - 14 + 10 = -12 \neq 0$ er *ikke* $(x-2)$ en faktor i $P(x)$.

b) Utfører polynomdivisjonen:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 - 7x + 10) : (x - 1) = \underline{\underline{x^2 - 3x - 10}} \\
\underline{x^3 - x^2 \qquad\qquad\qquad} \\
0 - 3x^2 - 7x + 10 \\
\quad \underline{-3x^2 + 3x \qquad\quad} \\
\qquad\quad 0 - 10x + 10 \\
\qquad\quad \underline{\quad -10x + 10} \\
\qquad\qquad\qquad 0 + 0
\end{array}
$$

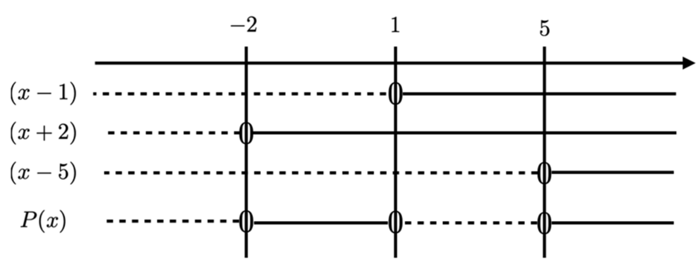
c) Videre finner vi nullpunktene til andregradspolynomet: $x^2 - 3x - 10 = 0$.
Dette gir ved abc-formelen: $x = -2 \vee x = 5$. Følgelig er

$$P(x) = \underline{\underline{(x-1)(x+2)(x-5).}}$$

d) Ved å bruke c) får vi ulikheten:

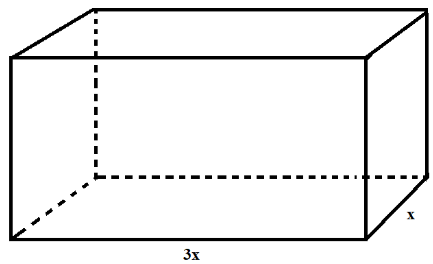
$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-5) \geq 0.$$

Dette gir et fortegnskjema:



Dermed er løsningen: $\underline{\underline{x \in [-2,1] \cup [5, \rightarrow\rangle}}$

Oppgave 2



a) La h være høyden. Da er volumet $V = 3x \cdot x \cdot h = 3x^2h$ og overflaten $O = 2 \cdot 3x \cdot x + 2 \cdot 3x \cdot h + 2 \cdot x \cdot h = 6x^2 + 8xh$. Siden $V = 300$, får vi: $3x^2h = 300 \Rightarrow h = 100/x^2$. Settes dette inn i uttrykket for O får vi:

$$O(x) = 6x^2 + 8xh = \underline{\underline{\frac{800}{x} + 6x^2}}$$

Og dermed:

$$O'(x) = -\frac{800}{x^2} + 12x = \underline{\underline{\frac{4(3x^3 - 200)}{x^2}}}.$$

b) Finner først når $O'(x) = 0$:

$$-\frac{800}{x^2} + 12x = 0$$
$$12x = \frac{800}{x^2}$$
$$12x^3 = 800$$
$$x^3 = \frac{800}{12} = \frac{200}{3}$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{200}{3}} \approx 4{,}05$$

Dette er det eneste stasjonære punktet og må tilsvare et minimum siden $O'(1) = -788 < 0$, og $O'(10) = 112 > 0$. Da blir overflata (i cm^2): $O(4{,}05) = \underline{\underline{296}}$.

Bredden, lengden og høyden blir da respektivt (i cm): $\underline{\underline{x = 4{,}05, \;\; 3x = 12{,}15, \;\; h = 6{,}10}}$

Oppgave 3

For å finne arealet kan vi bruke arealsetningen:

$$A = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin\angle A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 40^\circ = \underline{\underline{7{,}7}}$$

Den siste siden kan vi finne fra cosinussetningen:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\angle A = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cos 40^\circ = 15{,}23$$

Dermed: $BC = \sqrt{15{,}23} = \underline{\underline{3{,}9}}$

For $\angle C$ kan vi bruke, for eksempel, arealsetningen igjen:

$$A = \frac{1}{2} BC \cdot AC \sin\angle C$$

Som gir:

$$\sin\angle C = \frac{2A}{BC \cdot AC} = \frac{2 \cdot 7{,}7}{3{,}9 \cdot 4} = 0{,}987$$

$$\underline{\angle \mathrm{C} = 80{,}8° \vee \angle C = 180° - 80{,}8° = 99{,}2°}$$

For å sjekke hvilken det er kan vi bruke arealsetningen på den siste vinkelen, sinussetningen, eller cosinussetningen. Stokker vi om på cosinussetningen:

$$2AC \cdot BC \cos\angle C = AC^2 + BC^2 - AB^2 = 4^2 + 15{,}23 - 6^2 = -4{,}77 < 0$$

Dette betyr at $\cos\angle C < 0$ og vinkelen er i andre kvadrant, derfor:

$$\underline{\underline{\angle C = 99{,}2°}}$$

(Hvis en bruker cosinussetnngen for å finne $\angle C$ så kommer denne vinkelen ut som eneste mulighet).

Oppgave 4

Gitt punktene $A(2,4,-3), B(5,2,2)$ og $C(0,0,5)$.

a) Regner ut vektorene først:

$$\overrightarrow{AB} = [5-2, 2-4, 2-(-3)] = [3,-2,5]$$
$$\overrightarrow{AC} = [0-2, 0-4, 5-(-3)] = [-2,-4,8]$$

Da blir absoluttverdiene:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{9+4+25} = \underline{\underline{\sqrt{38}}}$$
$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{4+16+64} = \sqrt{84} = \underline{\underline{2\sqrt{21}}}$$

b) Vi regner ut vektorproduktet:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & -2 & 5 \\ -2 & -4 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= [(-2)\cdot 8 - (-4)\cdot 5, -(3\cdot 8 - (-2)\cdot 5), 3\cdot(-4) - (-2)\cdot(-2)]$$
$$= [4,-34,-16]$$

Da blir arealet av trekanten:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}|[4,-34,-16]| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + (-34)^2 + (-16)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2^2(2^2 + 17^2 + 8^2)} = \underline{\underline{\sqrt{357} \approx 18{,}9.}}$$

c) Siden vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ ligger i dette planet så er en parameterfremstilling for planet følgende:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t - 2s \\ y = 4 - 2t - 4s \\ z = -3 + 5t + 8s \end{cases}$$

d) Ved å bruke skalarproduktet:

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cos\alpha$$

Hvor $\alpha = \angle BAC$. For skalarproduktet:

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-4) + 5 \cdot 8 = -6 + 8 + 40 = 42.$$

Dermed får vi:

$$42 = \sqrt{38} \cdot 2\sqrt{21} \cos\alpha$$

$$\frac{42}{2\sqrt{21}\sqrt{38}} = \cos\alpha$$

$$\sqrt{\frac{21}{38}} = \cos\alpha$$

$$\alpha = \underline{\underline{\angle BAC = 42{,}0°}}$$

Punktene $A, B\ og\ C$ danner sammen med punktet $D(3{,}1{,}8)$ en trekantet pyramide.

e) Finner først $\overrightarrow{AD} = [3-2, 1-4{,}8-(-3)] = [1, -3, 11]$. Videre:
$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \bullet\ \overrightarrow{AD} = [4, -34, -16] \bullet [1, -3{,}11] = 4 + 102 - 176 = -70.$
Dermed er volumet:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \bullet\ \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6} \cdot 70 = \frac{35}{3}$$

som var det som skulle vises.

f) Siden for en pyramide $V = G \cdot h/3$, så får vi høyden til å bli:

$$h = \frac{3V}{G} = \underline{\underline{\frac{35}{\sqrt{357}} \approx 1{,}85}}$$

Oppgave 5

a) Et tredjegradspolynom gir en derivert som er en annengradsfunksjon. Hvis ekstremalpunktene er i 1 og -2, så må den deriverte se slik ut:

$$f'(x) = a(x+2)(x-1) = a(x^2 + x - 2).$$

Da må dens antideriverte være på formen:

$$f(x) = a\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right) + C.$$

b) Her er det også mange muligheter, for eksempel er rasjonale eksempler på formen:

$$h(x) = x - 2 + \frac{a}{x+2} = \frac{x^2 - 4 + a}{x+2}$$

Oppgave 6

a) For en aritmetisk rekke har vi $a_n = a_1 + (n-1)d$, dermed får vi:

$$a_8 = a_1 + 7d = \frac{8}{3}$$

$$a_{27} = a_1 + 26d = 9$$

Løser vi denne, for eksempel:

$$a_{27} - a_8 = 19d = 9 - \frac{8}{3} = \frac{27-8}{3} = \frac{19}{3}$$

Dermed er $\underline{\underline{d = \frac{1}{3}}}$.

Videre blir $a_1 = \frac{8}{3} - 7d = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$

Da blir $S_{40} = \frac{40}{2}(a_1 + a_{40}) = 20\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 39 \cdot \frac{1}{3}\right) = 20 \cdot \frac{41}{3} = \underline{\underline{\frac{820}{3}}}$

Gitt den uendelige geometriske rekken: $x^2 + (x^2 - 1) + \dfrac{(x^2-1)^2}{x^2} + \ldots\ldots$

b) Kvotienten for den geometriske rekka er:

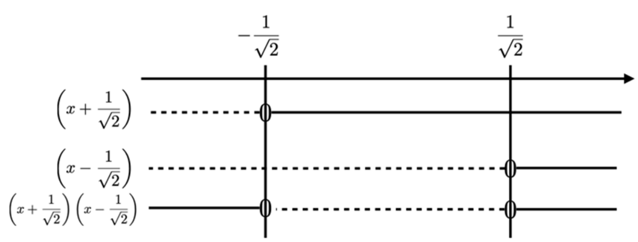
$$k = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \qquad x \neq 0.$$

Denne konvergerer når $-1 < k < 1$. For denne rekka gir det:

$$\begin{aligned}
&-1 < \frac{x^2-1}{x^2} < 1 \\
&-x^2 < x^2 - 1 < x^2 && | - x^2 \\
&-2x^2 < -1 < 0. && | \cdot (-1) \\
&2x^2 > 1 > 0.
\end{aligned}$$

Den siste ulikheten blir overflødig, slik at vi får:

$$\begin{aligned}
&2x^2 > 1 \\
&x^2 - \frac{1}{2} > 0 \\
&\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0
\end{aligned}$$



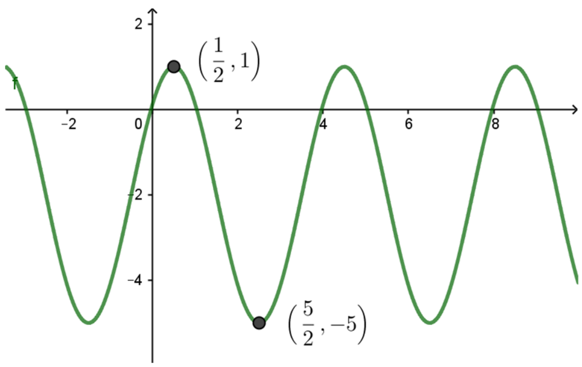
Dermed ser vi at denne rekka konvergerer når $\underline{\underline{x \in \langle \leftarrow, -\frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cup \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \rightarrow \rangle}}$

c) I konvergensintervallet er summen av rekka:

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{x^2}{1 - \frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{x^4}{x^2 - x^2 + 1} = x^4.$$

Hvis S $= 4$ får vi $x^4 = 4$, og dermed $x = \pm\sqrt[4]{4} = \underline{\underline{\pm\sqrt{2}}}$

Oppgave 7



a) Fra topp til bunn er det en halv periode. Så perioden er $p = 2 \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) = 4$. Amplituden: $A = \frac{1-(-5)}{2} = 3$. Likevektslinja til f er $d = -2$.

b) Først finner vi konstanten $k = \frac{2\pi}{p} = \frac{\pi}{2}$. Sinusfunksjonen har sitt første toppunkt for π/2, så velger vi dette til å tilsvare toppunktet vist på grafen så får vi:
$k \cdot \frac{1}{2} + c = \frac{\pi}{2}$, som gir $c = \frac{\pi}{2} - k \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$. Dermed vil følgende funksjon beskrive grafen:

$$\underline{\underline{f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) - 2}}$$

Oppgave 8

$$y' + x^2y^2 = 0$$

Vi legger merke til at $y(x) = 0$ (nullfunksjonen) er en løsning.
For $y \neq 0$ får vi

$$\frac{dy}{dx} = -x^2y^2 \quad | \cdot \frac{dx}{y^2}$$

$$\frac{dy}{y^2} = -x^2dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int (-x^2)dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{3}x^3 + C$$

Den generelle løsningen er derfor:

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{3}x^3 - C} = \underline{\underline{\frac{3}{x^3 + C'}}} \quad \vee \quad \mathrm{y(x)} = \underline{\underline{0}}$$

Oppgave 9

I klasse 3X på Flåklypa VGS er det 10 gutter og 16 jenter. Det skal tilfeldig trekkes ut et par (to elever) til å rydde i kantina.

a) Antallet måter det kan trekkes ut:
   1) Ei jente og en gutt: $10 \cdot 16 = \underline{\underline{160}}$
   2) To gutter: $\frac{10 \cdot 9}{2} = \underline{\underline{45}}$

b) Vi antar at de to personene blir trukket ut tilfeldig av alle elevene i klassen. Sannsynligheten for å *ikke* bli trukket ut er da:

$$P(\text{ikke trukket ut}) = \frac{25}{26} \cdot \frac{24}{25} = \frac{12}{13}.$$

Dermed er:

$$P(\text{trukket ut}) = 1 - P(\text{ikke trukket ut}) = 1 - \frac{12}{13} = \underline{\underline{\frac{1}{13}}}$$

Oppgave 10

Gitt $f(x) = (\ln x)^2 + 6 \ln x + 1,\ x > 0.$

a) Deriverer:

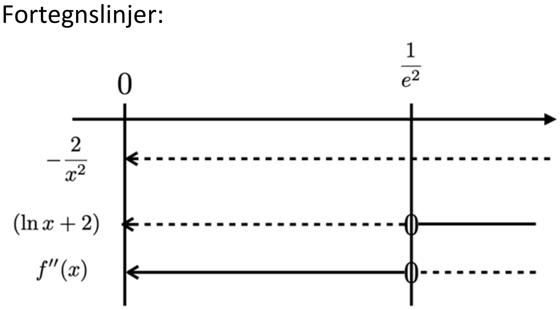
$$f'(x) = 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 3)$$

Her er $x > 0$ og $\ln x$ en strengt stigende funksjon. Videre $f'(x) = 0$ gir $x = e^{-3}$.
Monotoniegenskapene blir da:
$\underline{\underline{f \text{ er minkende på } \langle 0, e^{-3}] \text{ og stigende på } [e^{-3}, \rightarrow\rangle.}}$
Bunnpunkt: $\left(e^{-3}, f(e^{-3})\right) \underline{\underline{= (e^{-3}, -8)}}$

b) Deriverer:

$$f''(x) = -\frac{2}{x^2}(\ln x + 3) + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2}{x^2}(\ln x + 2)$$

Fortegnslinjer:



Dermed får vi:
Krummer opp på $\underline{\underline{\langle 0, \frac{1}{e^2}]}}$, og krummer ned på $\underline{\underline{[\frac{1}{e^2}, \rightarrow\rangle}}$
Vendepunkt: $\left(e^{-2}, f(e^{-2})\right) = \underline{\underline{\left(\frac{1}{e^2}, -7\right)}}$