

Prøve i	FO929A - Matematikk
Dato:	1. desember 2014
Målform:	Bokmål
Antall oppgaver:	8 (20 deloppgaver)
Antall sider:	3
Vedlegg:	Formelsamling
Hjelpemiddel:	Kalkulator

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver teller like mye.

Løsningsforslag

Oppgave 1

I denne oppgaven skal dere løse likninger. Alle svarene skal gis med **eksakte** verdier.

a) Løs den lineære likningen (eksakt!)

$$11,1x - 1,3 = \frac{2}{7}.$$

LF: Vi gjør om desimaltallene til brøker:

$$\frac{111}{10}x = \frac{2}{7} + \frac{13}{10} = \frac{20 + 13 \cdot 7}{70} = \frac{111}{70}$$

Dette gir at

$$x = \frac{111}{70} \cdot \left(\frac{111}{10}\right)^{-1} = \frac{111}{70} \cdot \frac{10}{111} = \underline{\underline{\frac{1}{7}}}$$

b) Løs den kvadratiske likningen

$$3x^2 + 7x = -4.$$

LF: Vi skriver først likningen på standard form

$$3x^2 + 7x + 4 = 0.$$

Andregradsformelen gir at løsningene er

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6} = \frac{-7 \pm 1}{6}$$

Løsningene er derfor $x = -1$ og $x = -4/3$.

c) Løs likningssystemet

$$\begin{aligned}x + 2y &= 3 \\y + 2x &= 4.\end{aligned}$$

LF: Vi har at $x = 3 - 2y$, fra den første likningen. Vi setter dette inn i den andre likningen og får

$$y + 2(3 - 2y) = 6 - 3y = 4$$

Dette gir at $3y = 2$, så $y = 2/3$ og $x = 3 - 2y = (9 - 4)/3 = 5/3$. Løsningen er $x = 5/3$ og $y = 2/3$.

d) Finn alle løsningene til likningen

$$4 \cos^2 v = 3$$

slik at $0 < v < 2\pi$ (radian).

LF: Likningen er ekvivalent til $|\cos(v)| = \sqrt{3}/2$, som igjen er ekvivalent til $\cos(v) = \sqrt{3}/2$ eller $\cos(v) = -\sqrt{3}/2$. Løsningene er

$$\underline{v = \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6}$$

e) Løs likningen $\sqrt{3 + 2x} + x = 0$.

LF: Likningen er ekvivalent til likningen $\sqrt{3 + 2x} = -x$. Vi kvadrerer på begge sider av likhetstegnet. Alle løsninger til den opprinnelige likningen er da også løsninger til den nye likningen (men ikke nødvendigvis motsatt)

$$3 + 2x = x^2.$$

Siden $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ så er røttene $x = -1$ og $x = 3$. Den første er en løsning til den opprinnelige likningen, mens den andre er en falsk løsning. Løsningen er $x = -1$.

Oppgave 2

I denne oppgaven skal dere løse ulikheter.

a) Finn alle løsningene til ulikheten

$$2 \sin(v) \cos(v) \geq \sin(v)$$

slik at $-180^\circ \leq v \leq 180^\circ$.

Ulikheten er ekvivalent til

$$2 \sin(v)(\cos(v) - 1/2) \geq 0.$$

I intervallet er $\sin(v) \geq 0$ for $v \in [0, 180^\circ]$ og $\cos(v) - 1/2 \geq 0$ for $v \in [-60^\circ, 60^\circ]$. Et fortegnsskjema gir at

$$2 \sin(v)(\cos(v) - 1/2) \geq 0$$

for $v \in \underline{[-180^\circ, -60^\circ] \cup [0, 60^\circ]}$.

b) Løs ulikheten

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x - 6} \leq 0.$$

LF: Vi faktorerer både teller og nevner og får

$$\frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 6)(x + 1)} \leq 0.$$

Et fortegnsskjema for disse fire faktorene gir løsningsmengden

$$\underline{[-3, -1) \cup [2, 6)}$$

Oppgave 3

Vi har tre punkter i rommet: $A(2, 1, 1)$, $B(1, 2, -4)$ og $D(-2, 1, 6)$.

a) Finn vektorene \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AD} . Anta at C er slik at $ABCD$ er et parallelogram. Bestem koordinaten til C .

LF: Vektoren \overrightarrow{AB} er lik

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [1, 2, -4] - [2, 1, 1] = \underline{[-1, 1, -5]}.$$

Tilsvarende er \overrightarrow{AD} er lik

$$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [-2, 1, 6] - [2, 1, 1] = \underline{[-4, 0, 5]}.$$

Siden $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, så er

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = [1, 2, -4] + [-4, 0, 5] = [-3, 2, 1]$$

Koordinatene til C er $(-3, 2, 1)$.

- b) Bestem vinkelen mellom vektorene \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AD} . Bestem arealet til parallelogrammet $ABCD$.

LF: La v være vinkelen. Da har vi at

$$\cos(v) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{-21}{\sqrt{27}\sqrt{41}} \approx -0,63117$$

Det gir at vinkelen mellom \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AD} er $129,13^\circ$.

Arealet til parallelogrammet er lik absoluttverdien til kryssproduktet

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = [5, 25, 4].$$

Det er lik

$$\sqrt{25 + 625 + 16} = \sqrt{666} \approx 25,807.$$

- c) Et punkt T har koordinater $(3, 3, 3)$. Bestem volumet til pyramiden med grunnflate $ABCD$ og topp i T .

LF: Volumet til pyramiden er en tredel av absoluttverdien til trippelproduktet av \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} og \overrightarrow{AT} .

Vektoren \overrightarrow{AT} er lik

$$\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA} = [3, 3, 3] - [2, 1, 1] = [1, 2, 2].$$

Trippelproduktet er lik

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -5 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 63.$$

Volumet til pyramiden er derfor lik 21.

Oppgave 4

- a) Et plan i rommet er parametrisert som følger

$$\begin{aligned} x &= 2s \\ y &= 4 - s \\ z &= 1 + 4s + t. \end{aligned}$$

Finn en likning som beskriver dette planet (løsningsmengden er planet).

LF: To ikke-parallele vektorer parallelle til planet er $[2, -1, 4]$ og $[0, 0, 1]$.

En normalvektor til planet er gitt ved kryssproduktet av disse to:

$$[2, -1, 4] \times [0, 0, 1] = [1, 2, 0].$$

(Vi finner også lett en normalvektor bare ved inspeksjon.) Siden punktet $(0, 4, 1)$ er et punkt i planet er planet gitt ved likningen

$$[1, 2, 0] \cdot [x, y, z] = [1, 2, 0] \cdot [0, 4, 1]$$

$$\underline{x + 2y = 8}$$

- b) Parametriser linjen som er snittet mellom planet i forrige deloppgave og planet gitt ved $x - y + 2z = 4$. (Linjen består av alle punktene som ligger i begge planene.)

LF: Linjen er parallell til kryssproduktet av de to normalvektorene:

$$[1, 2, 0] \times [1, -1, 2] = [4, -2, -3]$$

Vi finner et punkt som ligger i begge planene. For eksempel $(4, 2, 1)$. En parametrisering er derfor gitt ved

$$\begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

Oppgave 5

- a) Skriv opp de fem første leddene i den uendelige geometriske rekken som starter med 1 og som har kvotient lik $-1/2$. Bestem summen av den uendelige rekken (hvis den eksisterer).

LF:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Denne geometriske rekken konvergerer siden kvotienten har absoluttverdi mindre enn 1. Summen er

$$\frac{1}{1 - (-1/2)} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

- b) Finn summen av alle naturlige tall mindre enn eller lik 1000 som er delelig med 3.

LF: Det største tallet mindre enn eller lik 1000 som er delelig med 3 er 999. Summen er derfor lik

$$\sum_{i=1}^{333} 3i = 3 \cdot \frac{333 \cdot 334}{2} = \underline{166\,833}.$$

- c) Finn summen av alle naturlige tall mindre enn eller lik 1000 som er delelig med 3 eller med 7.

Dette er summen av alle tall som er delelig med 3 samt summen av alle tall som er delelig med 7 trekt fra summen av alle tall som er delelig med $3 \cdot 7$ (de telles dobbelt og må trekkes ifra).

Vi har at $2 \cdot 490 = 2 \cdot 10 \cdot 7^2 = 980$. Derfor er det største tallet delelig med 7 og mindre enn 1000 lik $994 = 142 \cdot 7$. Summen av de naturlige tall mindre eller lik 1000 som er delelig med 7 er

$$\sum_{i=1}^{142} 7i = \frac{142 \cdot 143}{2} \cdot 7 = 7 \cdot 71 \cdot 143 = 497 \cdot 143 =$$

$$(500 - 3)(140 + 3) = 70\,000 + 3(500 - 140) - 9 = 71\,071.$$

Det største tallet mindre enn eller lik 1000 som er delelig med 21 er $987 = 21 \cdot 47$. Summen av de naturlige tall mindre eller lik 1000 som er delelig med 21 er

$$\sum_{i=1}^{47} 21i = \frac{47 \cdot 48}{2} \cdot 21 = 47 \cdot 24 \cdot 21 = 47 \cdot 504 = (50 - 3)(500 + 4) = 23\,688.$$

Summen av alle naturlige tall mindre enn eller lik 1000 som er delelig med 3 eller med 7 er derfor

$$166\,833 + 71\,071 - 23\,688 = \underline{214\,216}$$

Oppgave 6

- a) Bestem alle trekantene ABC slik at AB har lengde 10, vinkel A er lik 30° og BC har lengde 6. Finn lengdene til alle sidene i trekantene.

LF: La b være lengden til side AC . Fra cosinussetningen har vi

$$6^2 = b^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot b \cdot \cos(30) = b^2 + 100 - 10\sqrt{3}b$$

Løsningen til denne annengradslikningen

$$b^2 - 10\sqrt{3}b + 64 = 0$$

er

$$b = \frac{10\sqrt{3} \pm \sqrt{300 - 4 \cdot 64}}{2} = \frac{10\sqrt{3} \pm \sqrt{44}}{2} = 5\sqrt{3} \pm \sqrt{11}$$

Lengden på siden AC er $5\sqrt{3} + \sqrt{11}$ for den ene mulige trekanten og $5\sqrt{3} - \sqrt{11}$ for den andre mulige trekanten.

- b) Bestem antall mulige trekanter ABC slik at vinkel A er lik 30° , lengden til AB er lik 10 og lengden til BC er lik a . (Svaret avhenger av verdien til $a > 0$. Beskriv antallet som en funksjon av a .)

LF: Det er ingen mulige trekanter om $a < 5$, det er akkurat én mulig trekant hvis $a = 5$ eller hvis $a \geq 10$ og det er to mulige trekanter om $5 < a < 10$.

Oppgave 7

- a) Grafen til likningen $x^2 + y^2 = 4x - 8y$ er en sirkel. Bestem koordinatene til senteret til sirkelen samt radius til sirkelen.

LF: Vi fullfører kvadratet:

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = (-2)^2 + 4^2 = 20$$

Senteret til sirkelen er derfor $(2, -4)$ og radien er lik $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

- b) Sirkelen i a) går gjennom origo. Regn ut arealet til den delen av (området inni sirkelen) som ligger i første kvadrant (det er den delen av de reelle planet hvor både x og y koordinatene er større enn eller lik null).

Arealet er lik differansen av arealet av sirkelsegmentet begrenset av første kvadrant og trekanten som ligger under x -aksen. Differansen er lik

$$\underline{(2\sqrt{5})^2 \cdot \arctan(2/4) - 2 \cdot 4 \approx 1.2729}$$

Oppgave 8

Finn radien R til den minste kule som inneholder en kjegle med høyde h og en sirkulær grunnflate med radius r .

LF: Hvis $h < r$ da kan vi plassere kjeglen slik at grunnflaten ligger på en storsirkel. Altså er $r = R$. Hvis $h > r$ derimot, da går ikke dette uten

at kjeglen stikker ut av kulen. Vi må derfor velge en større sfære. Anta at grunnflaten er flyttet ned y fra senteret i sfæren. Da er $h = R + y$ og $r^2 + y^2 = R^2$. Løser vi for y og setter dette inn i den andre likningen får vi

$$r^2 + (h - R)^2 - R^2 = r^2 + h^2 - 2Rh = 0$$

Dette er en lineær likning i R og løsningen er

$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$$

(Når h blir veldig stor i forhold til r ser vi at R blir tilnærmet lik $H/2$, som forventet. Når $r = h$ får vi $R = r$, også som forventet.)

Vi kan oppsummere dette slik:

$$R = \begin{cases} r & h < r \\ \frac{r^2 + h^2}{2h} & h \geq r \end{cases}$$