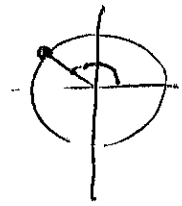
24.04.2014

Fourier rekker

1

En funksjon f er periodisk med periode T hvis $f(x+T) = f(x)$ og T er det minste (positive) tallet med denne egenskapen.



Eks. $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$

$\sin(nx)$, $\cos(nx)$ periodisk funksjon med periode $\frac{2\pi}{|n|}$, n heltall $\neq 0$

spesielt er $\sin(nx)$ og $\cos(nx)$ 2π-periodiske.

Rekken $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx))$

kalles en <u>Fourier rekke</u>.

Anta rekken har sum $S(x)$.

Da er $S(x + 2\pi) = S(x)$.

Vi ønsker å tilnærme en periodisk funksjon med (deler av) en Fourier rekke.

Anta f har periode T $\quad f(x+T) = f(x)$

Da har $f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ periode 2π:

$$f\left(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}\cdot x + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$$

(2) $f(x)$ lar seg best mulig tilnærme

av $a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

hvis $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int f(x) \cdot \cos(nx)\,dx$$

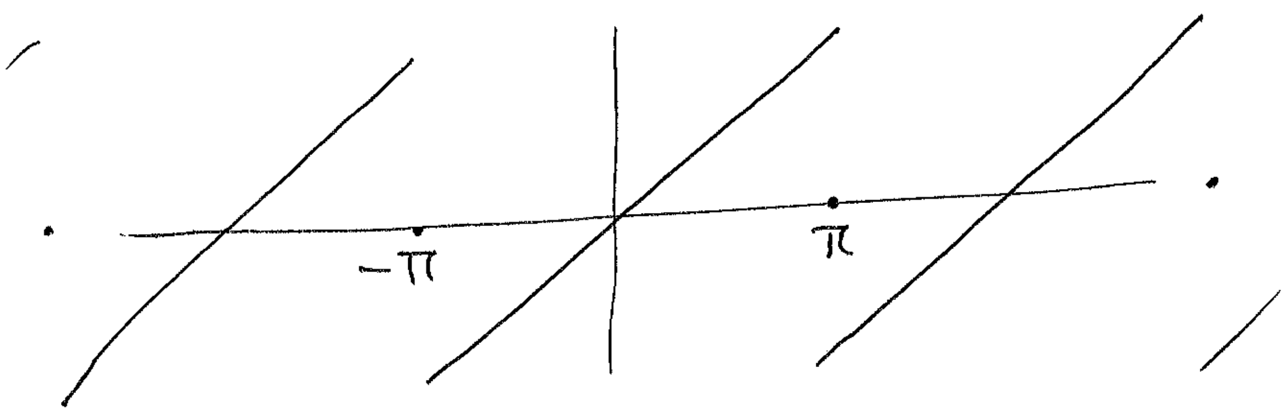
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int f(x) \sin(nx)\,dx$$

Hvis $f(x)$ er lik $S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

Da gir integralene ovenfor koeffisientene a_i og b_i tilbake igjen. Fourier tilnærmingen til $S(x)$ gir derfor $S(x)$ (hvis vi tar med tilstrekkelig mange ledd).

Eksempel. La $f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = -\pi, \pi \end{cases}$

$f(x)$ utvides til en funksjon på $\mathbb{R}$ ved å gjøre den periodisk med periode 2π.



(3)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0$$

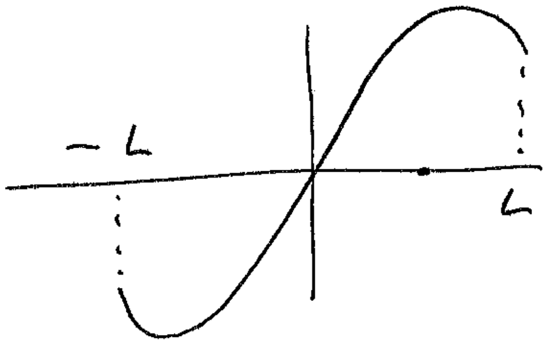
$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx)\, dx = 0$$

Repetisjon om odde funksjoner

Siden x og $x\cos(nx)$ er odde funksjoner.

f odde

$-f(-x) = f(x)$



$$\int_{-L}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

så $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$ når f er odde

$$\left(\int_{-L}^{0} f(x)\,dx \quad \text{La} \quad z = -x, \quad dz = -dx \right.$$

$$= \int_{L}^{0} f(-z)\,(-dz)$$

$$\left. = -\int_{0}^{L} \overbrace{-f(z)}^{\text{odde}}\,(-dz) = -\int_{0}^{L} f(x)\,dx \right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(nx)\, dx$$

$\left(\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx \right.$ delvis integrasjon $\left. \right)$

(4) $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overset{u}{x} \cdot \overset{v'}{\sin(nx)}\, dx$

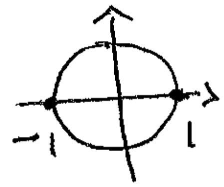
(velge $v = -\frac{\cos(nx)}{n}$, $u' = 1$)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[x \cdot \frac{-\cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \frac{\cos(nx)}{n}\, dx \right.$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi}{n} \cdot \left(-\cos(n \cdot \pi)\right)\right] - \underbrace{\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0}$$

$$= \frac{2}{n}\left(-\cos(n\pi)\right)$$

$$= \frac{2}{n}\left(-(-1)^n\right)$$



$$\underline{b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$ (vekk fra diskont.)

La $x = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$

0	n jevn
$1+4k$	: +1
$3+4k$	: −1

$$\frac{\pi}{2} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n \cdot \pi/2)$$

La $n = 2m+1$

$\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) = (-1)^m$

$$= 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1}(-1)^m$$

så

$$\underline{\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \cdots}$$

m-filer vedlagt