1 april 2014 Egenverdier og egenvektorer 5.1 (5.2)

(1) M $n \times n$ matrise

En skalar λ er en egenverdi for M hvis det finnes en vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ slik at

$$M\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Alle vektorene $\vec{v}$ slik at $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ kalles egenvektorene til λ (eller: egenvektorene med egenverdi λ)

$\vec{0}$ er en egenvektor for alle egenverdier.

Eksempler

1) $\mathbb{1}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathbb{1}_2 \cdot \vec{v} = 1 \cdot \vec{v}$

1 er en egenverdi og alle vektorer er tilhørende egenvektorer

2) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi 1.

$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi -1.

3) $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ (og $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$) er en egenvektor med egenverdi 0

$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi 1.

4) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ egenvektor med egenverdi 0.

2

Samlingen av egenvektorer til λ er et underrom av vektorrommet (lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon)

Anta $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er egenvektorer med egenverdi λ.

$$M(c\cdot\vec{v}_1) = c\cdot M\vec{v}_1 = c(\lambda\cdot\vec{v}_1) = \lambda(c\vec{v}_1)$$

$$M(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = M\vec{v}_1 + M\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2 = \lambda(\vec{v}_1+\vec{v}_2)$$

så $c\vec{v}_1$, $\vec{v}_1+\vec{v}_2$ er også egenvektorer med egenverdi λ.

Dette underrommet kalles <u>egenrommet</u> til egenverdien λ.

$$\vec{v} \neq \vec{0}$$

$\vec{v}$ er en egenvektor med egenverdi λ $\Leftrightarrow$

$$M\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad (M\vec{v} = \lambda\cdot \mathbb{1}_n\vec{v})$$

$$(M-\lambda\mathbb{1}_n)\vec{v} = \vec{0}$$

Det finnes en slik $\vec{v} \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $M-\lambda\mathbb{1}_n$ ikke er invertibel

$\Leftrightarrow$ $\det(M-\lambda\mathbb{1}_n) = 0$.

λ er en egenverdi til M $\Leftrightarrow$

$\det(M-\lambda\mathbb{1}_n) = 0$.

$\underbrace{\det(M-\lambda\mathbb{1}_n)}_{\text{polynom av grad } n\text{, hvor } M \text{ er en } n\times n\text{-matrise.}} = 0$ kalles den <u>karakteristiske likning</u> til M.

③ Eks $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Karakteristisk likning:

$$\det\left(M - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$= (-\lambda)^2 - 1^2 = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda + 1). = 0$$

Løsningene er $+1$ og -1.

—

(tilsvarende for $\lambda = 1$)

Egenvektorene til -1 er alle $\vec{v}$ slik at

$$(M - (-1)\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\vec{v} = \vec{0}$$

Løsningene er $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$ for skalarer a.

—

Generelt er egenvektorene med egenverdi λ alle vektorer $\vec{v}$ slik at $(M - \lambda\mathbb{1}_n)\vec{v} = 0$

(nullrommet til $M - \lambda\mathbb{1}_n$).

④

Eksempler

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$ (rotasjonstransformasjon)

$$\det(M - \lambda 1_n) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= \lambda^2 - (1)\cdot(-1) = \lambda^2 + 1 = 0.$$

* Over reelle tall har ikke M noen egenverdier (eller egenvektorer $\neq \vec{0}$). (Som forventet siden M er rotasjonstransformasjon)

* Over komplekse tall har $\lambda^2 = -1$ to løsninger : i , $-i$.

Egenvektorene : $\lambda = -i$: $\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v} = 0$$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor til $\lambda = -i$

$\lambda = i$ $\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor til $\lambda = i$.

Den karakteristiske likning til en 3×3-matrise er en tredjegradslikning. Det finnes alltid en reell egenverdi, og da en egenvektor ($\neq \vec{0}$).

(Alle rotasjoner i $\mathbb{R}^3$ har en rotasjonsakse (som bevares))

Oppgave 5. Finn egenverdiene og egenvektorene til

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristisk likning: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(2-\lambda)(-\lambda) - (-1)(1) = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 = 0$$

Egenverdiene er $\lambda = 1$.

$$M - 1 \cdot \mathbb{1}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

egenvektorer: $\vec{v}$ s.a $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}$

(radoperasjoner) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}$

Egenvektorene er $\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$ for skalarer a.

Egenvektorene til M utspenner et 1-dim rom.

Diagonal matrise $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

Karakteristiske likningen: $\det \begin{bmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & c-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$

Løsningen til den karakteristiske likningen er diagonalelementene.

(6) Egenverdiene til en $n \times n$-diagonal matrise

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{er} \quad a_{11}, \dots, a_{nn}$$

Basisvektoren $\vec{e}_k$ er en egenvektor med egenverdi a_{kk}.

— $\lambda = 0$ er en egenverdi $\Leftrightarrow$ $\det M = 0$ for M

(fordi $\det(M - \lambda \mathbb{1}_n) = \det(M)$ når $\lambda = 0$)

—

Resultat: Hvis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ er egenvektorer til M med egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ som alle er forskjellige fra hverandre, da er $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ lineært uavhengige.

Konsekvenser: - Hvis M er en $n \times n$ matrise så har M n eller færre egenverdier.

- Hvis M er en $n \times n$ matrise med n forskjellige egenverdier, da har M en basis bestående av egenvektorer (egenvektorene utspenner hele vektorrommet.)

Bevis Anta de ikke er lineært uavhengige

7 Da finnes det en k slik at

(L1) $a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_k\vec{v}_k = \vec{v}_{k+1}$

og $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ er lineært uavhengige.

Anvender transformasjonen M :

(L2) $a_1\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots a_k\lambda_k\vec{v}_k = \lambda_{k+1}\vec{v}_{k+1}$.

$\lambda_{k+1}\cdot$(L1) trekkes fra (L2)

$$a_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})\vec{v}_1 + \cdots + a_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})\vec{v}_k = \vec{0}$$

Alle $\lambda_i-\lambda_{k+1} \neq 0$ for $i=1,\ldots,k$.

Så $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k$ er ikke lineært uavhengige.

Dette gir en selvmotsigelse, så alle egenvektorene er lineært uavhengige.

Eksempel $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Finn egenverdiene.

Karakteristiske likning: $\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$$\lambda^2-\lambda-1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(1)(-1)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1.618 \qquad \lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \sim -0.618.$$