27.03.2014

Prøveordning

Leksehjelp fra neste Tirsdag (1. april)

① PI 551 $17^{00} - 18^{30}$

3.2 Egenskaper til determinanter.

A $n \times n$ matrise $n \geq 1$

$\det(A) = |A|$ er karakterisert:

fet 1

1) $\det(\mathbb{1}_n) = 1$ $\mathbb{1}_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

2) Bytter vi to rader i en matrise så skifter determinanten fortegn.

3) $\det(A)$ er lineær i hver rad

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i + kb_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ b_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$$

Konsekvenser: Hvis to rader er like (eller en rad er lik en skalar ganget en annen rad) da er determinanten null.

$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ bytter første og tredje rad $\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$

② Egenskaper til determinanter under radoperasjoner:

- Hvis B lages fra A ved å legge en rad, ganget med en skalar, til en annen rad, da er $\det B = \det A$.
- Hvis B lages fra A ved å bytte to rader, da er $\det B = -\det A$
- Hvis B lages fra A ved å gange en rad med r (skalar $\neq 0$), da er $\det B = r \cdot \det A$.

Eks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

De to siste radene er like opp til skalar mult.

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ så $\underline{\det A = 0}$

—

Anta A er en 2×2-matrise. Hva er $\det(k \cdot A)$? | $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ $kA = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{bmatrix}$

Prøver oss frem: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det A = 1$ $k \cdot A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

$\det(k \cdot A) = k \cdot k = k^2$

generell 2x2-matrise $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

(3) $kA = \begin{bmatrix} a\cdot k & b\cdot k \\ c\cdot k & d\cdot k \end{bmatrix}$

$$\det(kA) = (ak)(dk) - (bk)\cdot(c\cdot k)$$
$$= k^2(ad - bc)$$
$$\underline{\det(kA) = k^2 \det A}$$

Dette følger siden $\det A$ er lineær i hver rad

$$\det\begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{bmatrix} = k \det\begin{bmatrix} a_1 \\ ka_2 \end{bmatrix} = k\cdot k\cdot \det\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$
$$\underline{\det(kA) = k^2 \det A}$$

Generelt: $\det(k\cdot A) = k^n \det A$

for $n\times n$-matriser A.

Øvre triangulære matriser er på forma $A = \begin{bmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$

$a_{ij} = 0 \quad i > j$

$\det A$ er produktet av diagonalelementene

$a_{11}\cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ & -2 & 12 & 7 \\ 0 & & 3 & -8 \\ & & & -4 \end{bmatrix} = 1\cdot(-2)\cdot 3(-4) = \underline{24}$$

(4)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Hva er det A?

Radoperasjoner:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 \\ \\ -1 \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -5 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bytter rad 2 og rad 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = B$$

$$\det A = -\det B = -(-6) = \underline{\underline{6}}$$

Oppg. Hva er $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$?

Ved å bytte om på rader tre ganger kan vi få I_4. Derfor er det. lik $(-1)^3 \cdot \det(I_4) = \underline{\underline{-1}}$

⑤

oppgave

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 10 & 2 \\ 2 & 0 & 10 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ +2 \end{array}$$

Finn $\det(A)$.

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} + \\ \\ \\ +2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bytter rad 1 og rad 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

$$\det A = -\det B = -(10) = \underline{\underline{-10}}$$

A $n \times n$-matrise

Resultat: A er inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ inverterbar $\Leftrightarrow$ $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$

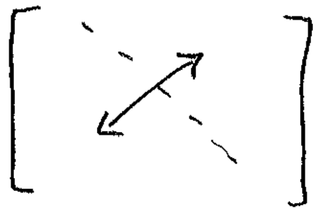
⑥ Den transponerte til en matrise $A = \{a_{ij}\}_{ij}$ er $A^T = \{a_{ji}\}_{i,j}$.

$$[1, 2, 3]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$n \times n$-matrise



reflekterer om diagonalen når vi transponerer

Resultatet $\underline{\det(A) = \det(A^T)}$

Så determinanter har samme egenskaper under kolonneoperasjoner som under radoperasjoner.

Resultat: $\underline{\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)}$

spesielt: $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

$$\left(\text{siden } \det(A \cdot A^{-1}) = \det(1_n) = 1 \atop = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) \right).$$

Resultatet er opplagt sant for diagonale matriser:

(7) $A = \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} s_1 \cdot t_1 & & 0 \\ 0 & s_2 \cdot t_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & s_n t_n \end{bmatrix}$$

$$\det(AB) = (s_1 \cdot t_1) \cdot (s_2 \cdot t_2) \cdots (s_n \cdot t_n)$$
$$= (s_1 \cdots s_n)(t_1 \cdots t_n)$$
$$= \det(A) \cdot \det(B)$$

Det generelle tilfellet kan reduseres til dette tilfellet ved å utføre radoperasjon på A og kolonne operasjoner på B.

$\det(A+B)$?

$B = A$ $\det(A+A) = \det(2A) = 2^n \det A$.

$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

2×2-matriser:

$$\det(A+B) = \det A + \det B + \det\begin{bmatrix} a_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} b_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

n×n-matriser: 2^n-ledd.