1

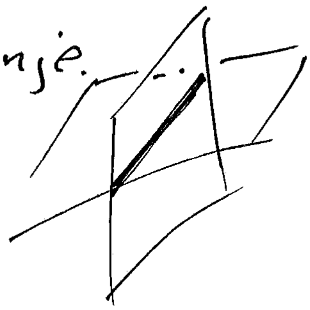
13.03

10.6 Snitt av to flater

Eks Snitt av to plan.

$$x+y+z=0 \quad \text{og} \quad 2x-y=3$$

Snittet til disse to plana er en linje.



Vi finner en parametrisering av linjen

$y = 2x-3$ (fra $2x-y=3$)

så $x+(2x-3)+z=0$

$z = 3-3x$

En parametrisering av linjen er

$$x = t \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$y = 2t-3$$
$$z = 3-3t$$

$[1,1,1]$ er en normalvektor til $x+y+z=0$

og $[2,-1,0]$ er en normalvektor til $2x-y=3$.

En retningsvektor til snittlinjen (som er tangentlinjen til hvert punkt på linjen) er $[1,2,-3]$.

Denne vektoren står vinkelrett på begge normalvektorene til plana.

Alternativ prosedyre for å finne tangentlinjene:

- Finn normalvektorer til tangentplana til de to flatene i punktet P. $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$
- Finn vektor som står vinkelrett på begge disse. En slik vektor er $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ (anta at plana ikkje er parallelle) Dette er en vektor parallell til tangenvektoren

② - parametriser tangentlinjen.

i tilfellet ovenfor:

$\vec{n}_1 = [1,1,1]$ og $\vec{n}_2 = [2,-1,0]$

vi kan regne ut kryssproduktet eller bare se at $[1,2,-3]$ er normal på $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$.

Snitt linjen (tangentlinjen) er $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$t \in \mathbb{R}$

Generelt $a_i x + b_i y + c_i z = d_i \quad i = 1,2$

to plan.

Anta plana ikke er parallelle.

Hvordan kan vi finne snittlinjen?

1) Normalvektorene er $\vec{n}_i = [a_i, b_i, c_i] \quad i = 1,2$

2) $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ ($\neq \vec{0}$ siden plana ikke er parallelle)

3) Finn et punkt (p_1, p_2, p_3) i begge plana.

En parametrisering av snittlinjen er

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{v} \cdot t + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

oppgave

(3) Gitt to flater $x^2+y^2+z^2 = 25 = 5^2$

$z = x\sin y + x + e^y$

1) Sjekk at $P = (3,0,4)$ ligger på begge flaten.

2) Finn normalvektoren til tangentplana til flatene i punktet P.

$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 5^2$

$G(x,y,z) = x\sin y + x + e^y - z = 0$

$\vec{\nabla} F = 2[x,y,z]$ i punkt p: $\vec{\nabla}F(p) = \underline{2[3,0,4]}$

$\vec{\nabla} G = [\sin y + 1, x\cos y + e^y, -1]$

i punktet p : $\vec{\nabla}G(p) = \underline{[1,4,-1]}$

En vektor $\vec{v}$ som står normalt på begge disse normalvektoren er $\vec{v} = [4, -\frac{7}{4}, -3]$

eller $[16,-7,-12]$.

Tangentlinjen til snittet av flatene i punktet p lik $(3,0,4)$ er

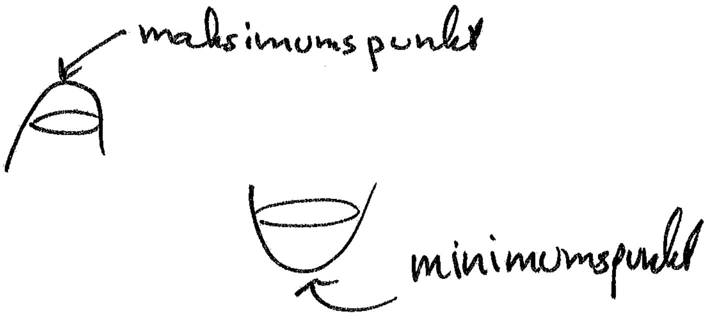
$$x = 3 + 16t$$
$$y = 0 - 7t \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$z = 4 - 12t$$

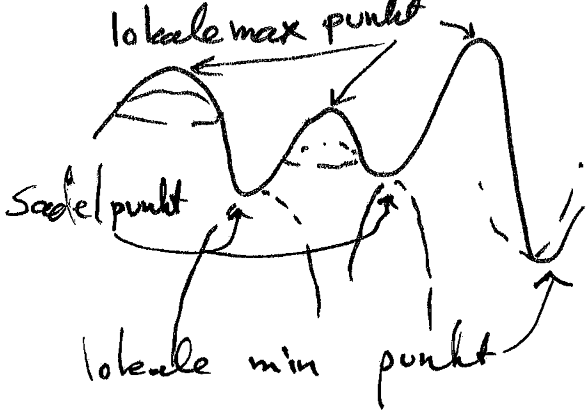
④

10.7 Lokale ekstremalpunkt

En funksjon f har

- Lokalt maksimum i p hvis $f(p) \geq f(\vec{x})$ for x i en omegn om p
- lokalt minimum i p hvis $f(p) \leq f(x)$ for x i en omegn om p.





(Ekstemalpunkt: max. min punkt)

Anta at p er et indre punkt i def. mengden til f og at f har kont. partill deriverte.

Da er $\vec{\nabla} f = \vec{0}$ i p hvis f har et lokalt max/min punkt i p.

Eksempel $\quad z = f(x,y) = y^2 - 2x^3 - 3x^2$

Finn lokale ekstremalpunkt til f.

$$\vec{\nabla} f = [-6(x^2+x),\ 2y]$$

Dette er lik $\vec{0}$ når $x^2 + x = 0$ og $y = 0$

$x = -1, 0$ og $y = 0$

$(-1,0)$ og $(0,0)$ er mulige kandidater til max og min punkt. (lokalt) Minimumspunkt på grafen i $\underline{(-1,0,-1)}$

$(0,0,0)$ er et sadelpunkt. (sett fra grafen)

Andrederivert testen

5 $f(x,y)$ kont. partiell deriverte av grad 2.

Hesse matrisen

Diskriminanten er $\Delta = \det\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$

($f_{xy} = f_{yx}$ siden kont. deriverbar)

Anta $f_x(a,b) = 0$ og $f_y(a,b) = 0$

$\Delta(a,b) > 0$ og $f_{xx}, f_{yy} > 0$ i (a,b), da har vi et lokalt min. punkt

$\Delta(a,b) > 0$ $f_{xx}, f_{yy} < 0$ i (a,b) har vi et lokalt maks. punkt

$\Delta(a,b) < 0$ da har f et sadelpunkt i (a,b).

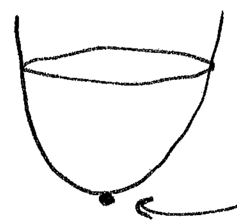
I eksempelet ovenfor $f_{yy} = 2$, $f_{xx} = -6(2x+1)$
$f_{xy} = 0$

$\Delta(0,0) = \det\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = -12 < 0$ Sadelpunkt

$\Delta(-1,0) = \det\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 12 > 0$ minimumspunkt.

Standard eksempler

$z = x^2 + y^2 = f(x,y)$



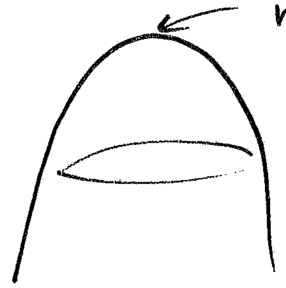
minimums punkt

$f_x = 2x$, $f_y = 2y$

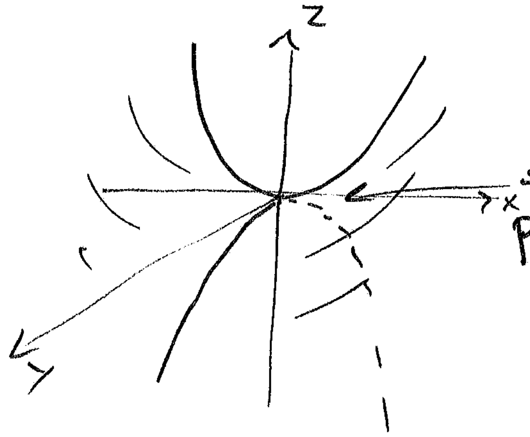
$f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 0$

$\Delta = \det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4 > 0$

(6) $z = -(x^2+y^2)$



$$z = x^2 - y^2$$



$f_x = 2x \qquad f_y = -2y$

$$\Delta = \det \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -4 < 0$$

Eksempel: $\qquad f = x \cdot y$

$\vec{\nabla} f = [y, x]$. Denne er $\vec{0}$ når $x=0$, $y=0$.

oppgave
Har f et ekstremal punkt i $(0,0)$?

$f_{xx} = f_{yy} = 0 \qquad f_{xy} = f_{yx} = 1$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0^2 - 1^2 = -1 < 0$$

svar: Nei, vi har et sadelpunkt i $(0,0)$.

(7) Plottet grafer

```
[x,y] = meshgrid (-2:0.02:2 , -2:0.2:1);
  z = (y.^2 - 3*x.^2 - 2*x.^3);
  w = x*0              % x-y planet ;
mesh (x,y,z)           % grafen til z
hold on                % beholde første graf
surf (x,y,w)           % xy-planet plottet på
                       % en alternativ måte
```