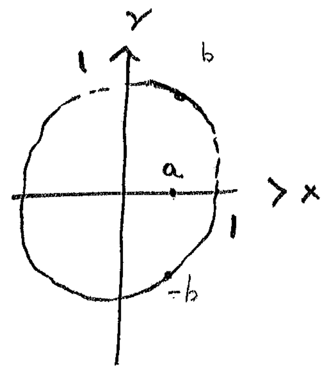
11 mars 2014

10.6 Gradienten som normalvektor
Implisitt derivasjon

(1)

En funksjon $y(x)$ er gitt implisitt, hvis vi ikke har et uttrykk for $y(x)$ men bare en likning $F(x,y)=0$ i x og y som y må tilfredsstille.



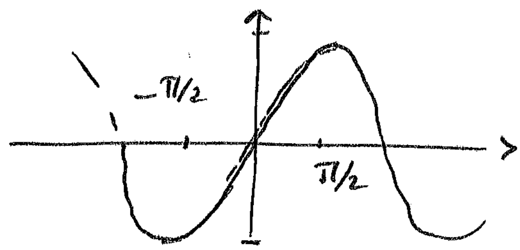
Eks $\quad x^2+y^2=1$

y er gitt implisitt som en funksjon av x

$y=\sqrt{1-x^2}$ er to kontinuerlige

$y=-\sqrt{1-x^2}$ funksjoner som tilfredsstiller likningen $x^2+y^2=1$

Her er y gitt eksplisitt.



Eks $\quad x=\sin(y)$

Vi kan velge $y=\arcsin(x)$

Resultat $\quad$ Anta $F(x,y)$ er kontinuerlig deriverbar i (a,b) og $F_y(a,b)\neq 0$

Da finnes det en funksjon $y(x)$ slik at $y(a)=b$ og $y(x)$ ligger på nivåkurven til $F(x,y)$ som inneholder punktet (a,b).

(Det er $F(x,y)=F(a,b)$)

Videre er $\quad y'(a) = -\dfrac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)}$

Eks $F(x,y) = x^2 + y^2$.

2 $\quad \vec{\nabla} F = [2x, 2y]$

La $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad b = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ $\quad F(a,b) = 1$.

$y(x) = -\sqrt{1-x^2}$ er en funksjon def. rundt $\frac{1}{\sqrt{2}}$

s.a $\quad F(x, y(x)) = 1$

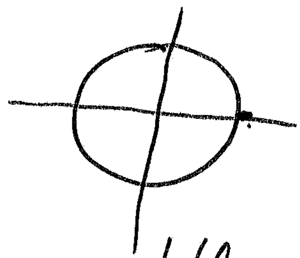
$$y'(a) = \left(-\sqrt{1-x^2}\right)'_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\left((1-x^2)^{1/2}\right)'_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= -\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\bigg|_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\bigg|_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \underline{1}$$

Dette er det samme som $-\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)}$

$$= -\frac{2\cdot a}{2\cdot b} = -\frac{2\cdot 1/\sqrt{2}}{2\cdot(-1/\sqrt{2})} = \underline{1}$$

Hva skjer i punktet $(1,0)$?



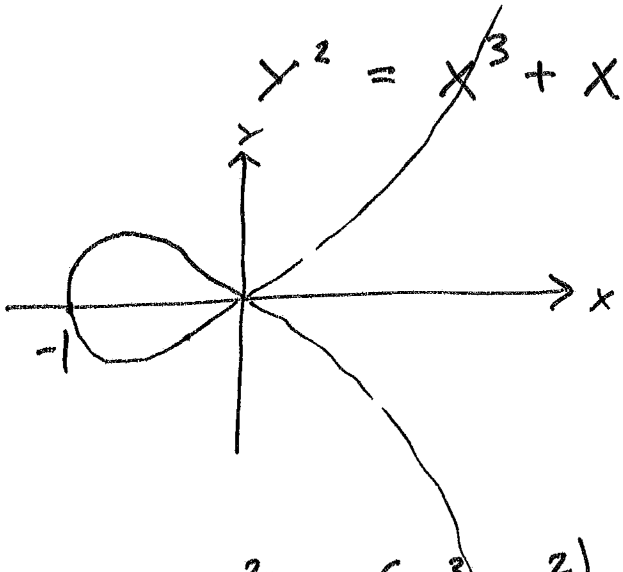
Her er $\quad F_y(1,0) = 2y\,|_{y=0} = 0$

Premissene til resultatet feiler. (Konklusjonen holder heller ikke.
y er ikke def. i en omegn om 1.
Ikke deriverbar i $x=1$)

3

Node

$$y^2 = x^3 + x^2 = x^2(x+1)$$



$$F(x,y) = y^2 - (x^3 + x^2) = 0.$$

$$F_x = -(3x^2 + 2x) \qquad F_y = 2y$$

i origo $(0,0)$ er $F_x(0,0) = 0 = F_y(0,0)$

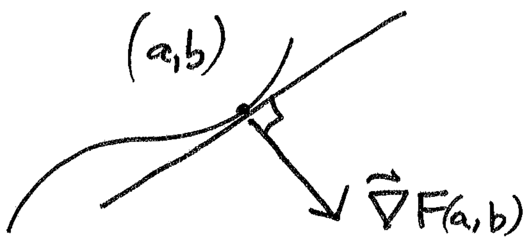
så premissene til resultatet ovenfor er ikke oppfylt.

Resultatet om implisitte funksjoner kan seg utvide til funksjoner med flere variabler (se boka)

<u>Resultat</u> Anta F er kont. deriverbar i (a,b) og $\vec{\nabla} F(a,b) \neq 0$

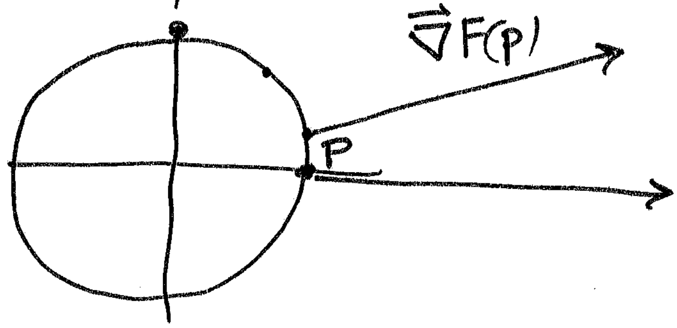
Da er $\vec{\nabla} F(a,b)$ en normalvektor til (tangenten til) nivåkurven til $F(x,y)$ som inneholder (a,b)

(Det er nivåkurven $F(x,y) = F(a,b)$.)



Eks $F(x,y) = x^2 + y^2 = 1$

$\vec{\nabla} F = [2x, 2y] = 2[x,y] = 2\vec{r}$



Vi ser at $\vec{\nabla} F$ står vinkelrett på nivåkurven $F(x,y) = 1$ i hvert punkt på sirkelen.

Eks $F(x,y) = y^3 - x^4 + 3x^2 y - 3$

$(1,1)$ ligger på nivåkurven $F(x,y) = 0$

Har kurven en tangent i $(1,1)$?

I så fall finn en normalvektor til tangentlinjen.

$$\vec{\nabla} F(x,y) = [-4x^3 + 6xy,\ 3y^2 + 3x^2]$$

$$\vec{\nabla} F(1,1) = [2, 6] = 2[1,3].$$

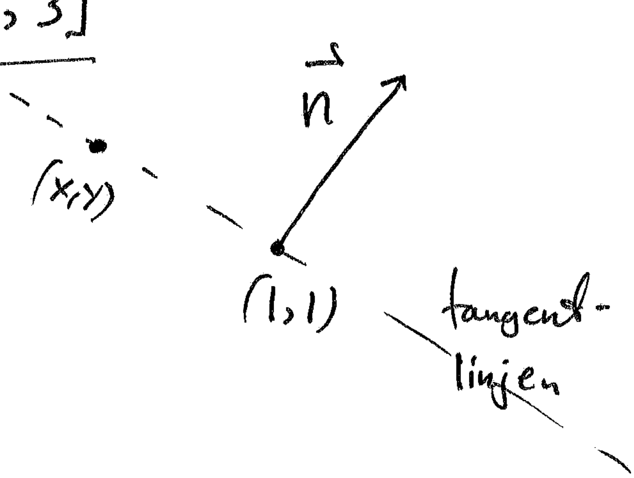
så kurven har en tangentlinje i $(1,1)$ og en normal vektor er $\underline{[1,3]}$

Vi kan beskrive tangentlinjen ved en likning

$$[x-1, y-1] \cdot \vec{n} = 0$$

$$[(x-1), (y-1)] \cdot [1,3] = 0$$

$$\underline{x + 3y - 4 = 0}$$



Vi kan også parametrisere tangentlinjen.

En vektor normal på $\vec{n} = [1,3]$ er $\vec{v} = [3,-1]$

(5) $[x,y] = [1,1] + t[3,-1]$ $\quad t \in \mathbb{R}$

parametrisere tangentlinjen

$x = 1 + 3t$
$y = 1 - t$.

Tangentplan

Anta $F(x,y,z)$ er kont. deriverbar i et punkt $P = (a,b,c)$. og $\vec{\nabla} F(p) \neq 0$

Da er $\vec{\nabla} F$ en normal (til tangentplanet) til nivåflaten til $F(x,y,z)$ som inneholder P

$(F(x,y,z) = F(a,b,c))$.

Eks. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 3$ $\quad (F(x,y,z) = 3)$

$p = (2,3,4)$ ligger på nivåflaten ovenfor

$F(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$.

$\vec{\nabla} F = 2[\frac{x}{4}; \frac{y}{9}, \frac{z}{16}]$.

$\vec{\nabla} F(p) = 2[\frac{2}{4}, \frac{3}{9}, \frac{4}{16}] = 2[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}]$.

$\vec{\nabla} F(p) \neq 0$ så vi har et tangentplan til nivåkurven i P.

Enkelt eks. Et plan er gitt ved

6 $F(x,y,z) = ax + by + cz + d = 0.$

$\vec{\nabla} F = [a, b, c]$

Resultatet gir at $[a,b,c]$ er en normal til planet. (som vi vet fra før)

Grafen til $z = f(x,y)$ er det samme som nivåkurvene til $F(x,y,z) = f(x,y) - z$

hvor $F(x,y,z) = 0$

$\vec{\nabla} F = [f_x, f_y, -1] \quad (\neq \vec{0})$

Hvis $f(x,y)$ er kont. deriverbar i (a,b)

(som er det samme som F er kont. deriverbar i $(a, b, f(a,b))$)

så har grafen til $z = f(x,y)$ et tangentplan i (a,b) og $[f_x, f_y, -1]$ er en normalvektor.

Tangentplanet er derfor gitt ved

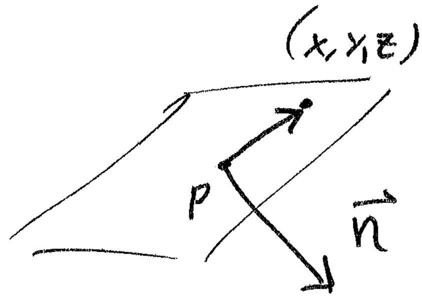
$\overrightarrow{P(x,y,z)} \cdot [f_x, f_y, -1] = 0$

$[(x-a), (y-b), (z - f(a,b))] \cdot [f_x, f_y, -1] = 0$

$f_x (x-a) + f_y (y-b) + f(a,b) = z$ (som brukt tidligere)

⑦ En normalvektor til tangentplanet er $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}]$ (eller: $[6, 4, 3]$)

En likning for tangentplanet:



(x,y,z) ligger i tangentplanet

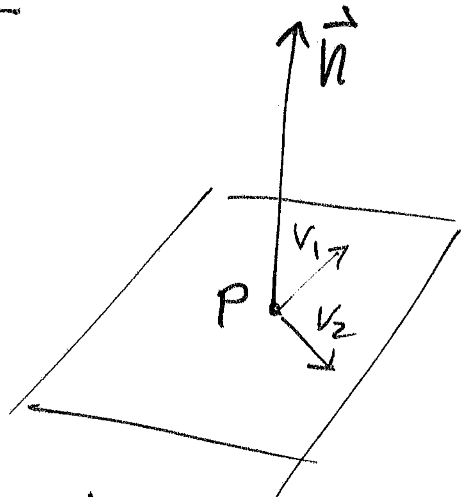
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{P,(x,y,z)}$ er vinkelrett på $\vec{n}$

$[x-2, y-3, z-4] \cdot \vec{n} = 0$

$[x-2, y-3, z-4] \cdot [6, 4, 3] = 0$

$6x - 12 + 4y - 12 + 3z - 12 = 0$

$\underline{6x + 4y + 3z - 36 = 0}$



Parametrisering av tangentplanet

Velger to lineært uavhengige vektorer $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ som er parallelle til linjer i planet.

$[x,y,z] = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 \qquad s,t \in \mathbb{R}$

$\vec{n} = [6, 4, 3]$ så kan vi velge

$\vec{v}_1 = [1, 0, -2] \qquad \vec{v}_2 = [-2, 3, 0]$

$$\begin{aligned} x &= 2 + t - 2s \\ y &= 3 + 3s \\ z &= 4 - 2t \end{aligned} \qquad \text{for } s,t \in \mathbb{R}.$$