13.02.2014

H Fausk

Kommentarer til oblig 1

Mange skrev:

"$x^4 + x$ har ingen 10-ende derivert".

dere mente kanskje: $x^4 + x$ har en 10-ende derivert og den er 0 (for alle x).

$f(x) = |x|$

$f(x)$ har ingen derivert når $x = 0$

den deriverte til $f(x)$ eksisterer ikke i $x = 0$.

$\left(\frac{8}{9}\right)^n \to \infty$ når n blir stor. ?

3a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^{n/10}}$

Forholdstesten: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{10} / 10^{(n+1)/10}}{n^{10}/10^{n/10}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{10}}{n^{10}} \frac{10^{n/10}}{10^{(n+1)/10}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \cdot \frac{1}{10^{1/10}}$$

$$= \frac{1}{10^{1/10}} = \frac{1}{\sqrt[10]{10}} < 1.$$

Så rekken konv. ved forholdstesten.

---

n^{10} polynom av grad 10

$$10^{n/10} = (10^{1/10})^n = (\sqrt[10]{10})^n = e^{(\frac{1}{10}\ln 10)\cdot n}$$

n^2 vokser raskere enn n, men $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergere

Det er ikke tilstrekkelig å si følgende: $10^{n/10}$ er en eks. funksjon og vokser mye raskere enn pol. n^{10}, →

derfor konvergerer rekken.

En måte å gjøre argumentet presis:

$10^{n/10}$ vokser raskere enn et hvert pol., og da også n^{12} (for eksempel)

Det finnes en N: $10^{n/10} > n^{12}$ for en $n > N$

$$0 < \frac{n^{10}}{10^{n/10}} < \frac{n^{10}}{n^{12}} = \frac{1}{n^2}. \qquad n > N$$

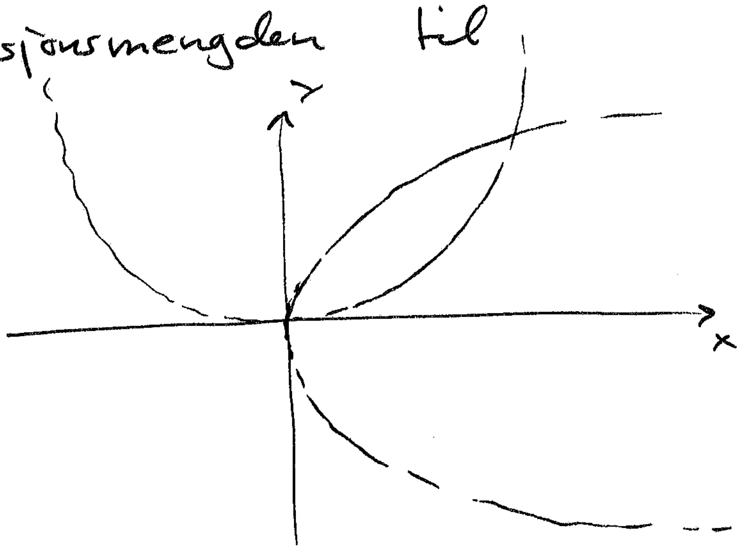
Siden $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergerer, vil da rekke $\sum \frac{n^{10}}{10^{n/10}}$ også konvergere.

③ $f(x,y)$ $f(\vec{x})$ funksjoner med mer enn én variabel

10.1

Finn den naturlige definisjonsmengden til

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{(y-x^2)(y^2-x)}$$



f er def der hva nevnern er ulik 0

$$(y-x^2)\cdot(y^2-x) \neq 0$$

f er <u>ikke</u> def når $(y-x^2)(y^2-x) = 0 \iff$

$y-x^2=0$ og $y^2-x=0 \iff$

$y=x^2$ og $x=y^2$

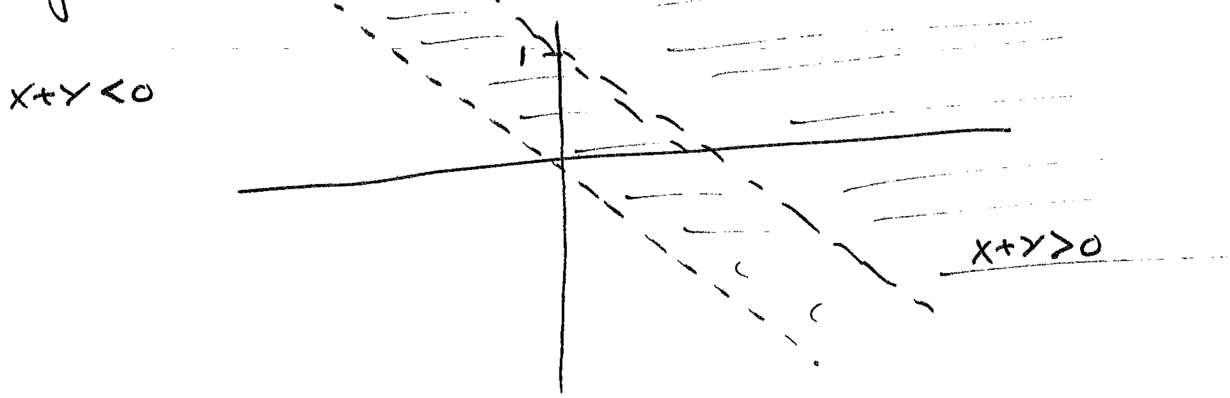
D_f er alle punkt (x,y) bortsett fra de som ligge på kurvene $y=x^2$ og $x=y^2$

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (y-x^2)\neq 0 \text{ og } (x-y^2)\neq 0\}.$$

Finn den nat. def. mengden til

$$f(x,y) = \frac{1}{\ln(x+y)}$$

f er def når $x+y>0$ og $x+y\neq 1$



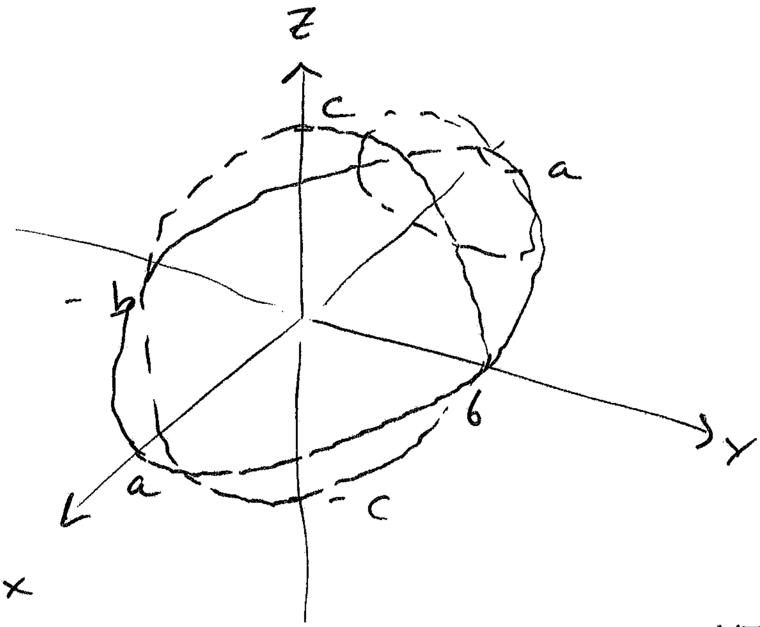
④ $f(x,y,z) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2}$ $\quad a, b, c > 0$

Hva er den nat. def. mengden?

$\left\{ (x,y,z) \;\middle|\; 1 - \left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \right] \geq 0 \right\}$

$= \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; 1 \geq \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \right\}$

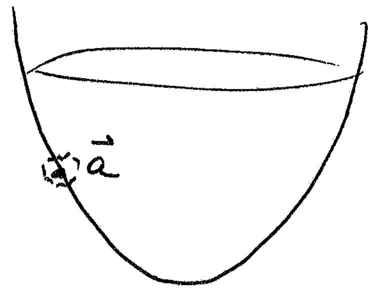
Ellipsoide



(volumet er $\frac{4\pi}{3}abc$)

10.2 $f(\vec{x})$ er <u>kontinuerlig</u> i $\vec{x} = \vec{a}$ hvis

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$$



Grensesetningene

Anta $\lim_{x \to \vec{a}} f(\vec{x}) = K$ og $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} g(\vec{x}) = \cancel{K}\, L$

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = K + L$$

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}) = K \cdot L$$

(Konsekvenser : $g(\vec{x}) = c$, en konstant funksjon

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} c \cdot f(\vec{x}) = c \cdot K$$

$$\lim_{x \to \vec{a}} f(\vec{x}) - g(\vec{x}) = \lim_{x \to \vec{a}} f(\vec{x}) + (-1) \cdot g(\vec{x}) = K - L \Big)$$

Hvis $L \neq 0$, da er $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \frac{K}{L}$.

Grenser av sammensatte funksjoner :

$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} h(f(\vec{x})) = h(K)$ hvis h er kontinuerlig i K.

Alle polynomer er kontinuerlige.

Alle rasjonale uttrykk er kontinuerlige der de er definert.

eks $\lim_{(x,y)\to(4,5)} \frac{x-y}{x^3-y^2} = \frac{4-5}{4^3-5^2} = \frac{-1}{64-25} = \frac{-1}{39}$

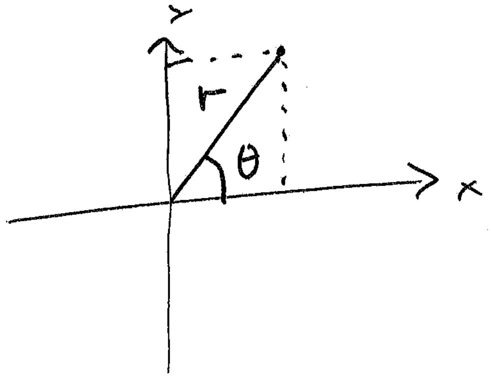
Hvor er $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

kontinuerlig?

Den er kont. når $(x,y) \neq \vec{0}$ siden den da er et rasjonalt uttrykk.

Hva skjer i $\vec{0}$?

Bruke polar koordinat



$x = r\cos\theta$
$y = r\cdot\sin\theta$.

$x^2+y^2 = r^2$: $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \arctan 2(x,y)$

$$\frac{x\cdot y^2}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta\cdot r^2\sin^2\theta}{r^2} = r\cos\theta\cdot\sin^2\theta$$

$\left|\frac{x\cdot y^2}{x^2+y^2}\right| \leq r$

så $\lim_{(x,y)\to\vec{0}} \left|\frac{x\cdot y^2}{x^2+y^2}\right| = 0 = f(\vec{0})$.

$f(x,y)$ er kontinuerlig i hele $\mathbb{R}^2$.