30.01.2014

# Konvergenstester

(1) Hvis $\sum^{\infty} a_n$ konvergerer, da må $a_n \to 0$ når $n \to \infty$

så hvis $a_n$ ikke går mot 0 når $n \to \infty$ da vil $\sum^{\infty} a_n$ divergere.

$\sum^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^5}\right)$ divergerer siden $a_n \to 1$, $n \to \infty$

—

Konvergens av en rekke er uavhengig av hvor rekken starter.

— sammenlikningstesten

Hvis $\sum^{\infty} b_n$ konvergerer og $0 < a_n < c b_n$ for en konstant c (og n stor), da vil $\sum^{\infty} a_n$ konvergere.

—

Konvergerer $\sum^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n-7)}$ ?

Når n er stor $\frac{1}{(n+3)(n-7)} \sim \frac{1}{n \cdot n} = \frac{1}{n^2}$

p-rekken $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergerer.

[ p-rekker er på formen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

p-rekken konvergerer når $p > 1$

divergerer når $p \leq 1$ ]

Mer presist: $\frac{1}{n+3} < \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n-7} \leq \frac{2}{n}$ $n \geq 14$

$2(n-7) = 2n - 14 \geq n$

Så $\left(\frac{1}{n+3}\right)\left(\frac{1}{n-7}\right) < \frac{2}{n^2}$ $n \geq 14$. Siden $\sum \frac{2}{n^2}$ konvergerer gir sammenlikningstesten resultatet.

Grensesammenlikningstesten

② $\sum a_n$ , $\sum b_n$ $a_n > 0$ $b_n > 0$

Hvis $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ eksisterer

da vil $\sum a_n$ konvergere hvis $\sum b_n$ konvergerer.

Anvender testen på foregående eksempel.

$$\sum \underbrace{\frac{1}{(n+3)(n-7)}}_{a_n} \qquad \sum \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+3)(n-7)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{3}{n})(1-7/n)}$$

$$= 1 .$$

Så $\sum a_n$ konvergerer siden $\sum b_n$ konvergerer

Eksempler Konvergerer $\sum \frac{n^2+1}{n^3+n^2+13}$ ? NEI

$$\frac{n^2+1}{n^3+n^2+13} \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \quad n \text{ stor}$$

- Konvergerer $\sum \frac{n^5}{n^n}$ ?

$$n^5 \cdot n^{n-5} = n^n > n^5 \quad \text{når} \quad n > 5$$

$$n^n / n^5 = n^n \cdot n^{-5} = n^{n-5} \geq n^2 \quad \text{når} \quad n \geq 7$$

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{n^5}{n^n} \qquad \sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$0 < \frac{n^5}{n^n} < \frac{1}{n^2} \quad \text{og} \quad \sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergerer}$$

så ved sammenlikningstesten vil

$\sum \frac{n^5}{n^n}$ konvergere.

Forholdstesten $\quad \sum a_n \quad\quad a_n > 0$

3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

$(0 \le) L < 1 \quad \sum a_n$ konvergere

$L > 1 \quad \sum a_n$ divergerer

$L = 1 \quad$ ingen konklusjon.

—

$$\sum^{\infty} x^n \qquad x > 0$$

$$a_n = x^n \qquad a_{n+1} = x^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{x^n} = x^{n+1-n} = x^1 = x$$

konvergerer når $0 < x < 1$ og divergerer når $x \geq 1$.

$$\sum \frac{x^n}{n^4} \qquad a_n = \frac{x^n}{n^4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}/(n+1)^4}{x^n/n^4} = \lim_{n\to\infty} x \frac{n^4}{(n+1)^4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} x \frac{1}{(1+1/n)^4} = x$$

$\sum \frac{x^n}{n^4}$ konvergerer når $x < 1$ og $x = 1$

divergerer når $x > 1$

$x = 1$: $\quad \sum^{\infty} \frac{1^n}{n^4} = \sum^{\infty} \frac{1}{n^4}$. konvergerer (p-rekke)

—

$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ konvergerer rekken? Ja

$$a_n = (n!)^2/(2n)!$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!^2/(2n+2)!}{n!^2/2n!}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\lim a_{n+1}/a_n = \frac{1}{4}$$

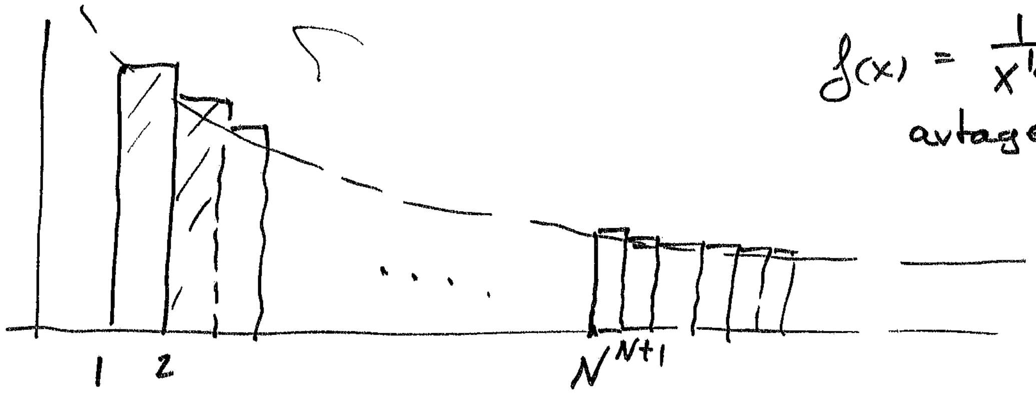
p-rekke med $p = 1.1$

Finn et estimat med nøyaktighet $10^{-4}$.

4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[10]{n}}$$

Den konvergerer siden $p > 1$.




$f(x) = \frac{1}{x^{1.1}} > 0$
avtagende

$$\int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^{1.1}}\,dx < S - S_N$$

$$S - S_{N+1} < \int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^{1.1}}\,dx$$

$$\int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^{1.1}}\,dx + S_N < S < \int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^{1.1}}\,dx + S_{N+1}$$

$$\int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^{1.1}}\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_{N+1}^{M} x^{-1.1}\,dx = \lim_{M\to\infty} \frac{x^{-0.1}}{-0.1}\Big|_{N+1}^{M}$$

$$= 10\left(\frac{1}{\sqrt[10]{N+1}}\right) = \underline{\frac{10}{\sqrt[10]{N+1}}}$$

$$0 < S - \left(S_N + \frac{10}{\sqrt[10]{N+1}}\right) < \frac{1}{(N+1)^{1.1}}$$

Hvis vi ønsker å regne ut $S$ med en nøyaktighet $10^{-4}$ så er $N = 10^4$ tilstrekkelig

$$\frac{1}{(N+1)^{1.1}} < 10^{-4}$$

$$S_{10^4} + \frac{10}{\sqrt[10]{10^4+1}} = 10.5844\ldots$$

$$S_{10^4} = 6.60339\ldots.$$

(5) Taylor rekken til $\sin x$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - +$$

Anta $0 \leq x \leq 1$ Da er rekken med ledd

$$a_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

alternerende og $|a_n|$ er avtagende.

$$|S - S_{2N+1}| < |a_{n+1}| \leq \frac{1}{(2(n+1)+1)!} = \frac{1}{(2n+3)!}$$

Hva må $N$ være for at

$|S - S_{2N+1}|$ skal være mindre enn $10^{-10}$?

$15! = 1.3\ldots \cdot 10^{12}$ $13! = 6.2\ldots \cdot 10^{9}$

Vi må derfor ha $2n+3 \geq 15$ så

$$\left(\begin{array}{l} 2n \geq 12 \\ n \geq 6. \end{array}\right)$$

$S_{13}(x)$ tilnærme $\sin x$ med nøyaktighet

$10^{-10}$.

Enkle for-løkker lar deg finne endelige delsummer.

For eksempel summen $\sum_{n=0}^{100} \frac{1}{n!}$ kan vi finne som følger:

```
a = 0
for n=0:100
a = a + 1/factorial(n);
end
```