Eksamen i Ma 2000 for Bygg/maskin, 4 febr. 2011

OPPGAVE 1

a) Skriv uttrykket $-\cos 4t + \sqrt{3}\sin 4t$ på formen $A\sin(\omega t + \phi)$. Hva er amplituden og perioden til denne harmoniske svingningen?

b) Løs initialverdiproblemet $4y'' + 12y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$

OPPGAVE 2

En flate F er gitt som grafen til funksjonen $z = f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 9x^2 - 3y + 5$.

a) Regn ut de partielt deriverte til f av første og andre orden.

b) Bestem ligningen for tangentplanet i punktet $(1, 1, -4)$. Dette planet er parallelt med en av de 3 koordinataksene. Hvilken koordinatakse?

c) La $c = f(a, b)$. Finn c når $(a, b) = (0.5, 2)$. Vi tenker oss a og b er målte verdier med en maksimal målefeil på 0.04 for a og 0.03 for b, dvs. at $a = 0.50 \pm 0.04$ og $b = 2.00 \pm 0.03$. Finn den usikkerheten dette gir for verdien av c.

d) Finn de kritiske punktene til f og angi deres type.

e) Vertikalplanet $4x - y = 0$ skjærer flaten F i en kurve C. Finn stigningstallet til tangenten til C i punktet $(\frac{1}{2}, 2, 5)$.

OPPGAVE 3

a) Avgjør om følgende rekker konvergerer eller divergerer. Finn summen til de rekkene som konvergerer.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n\sqrt{n} + 7n^2} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9 \cdot 2^{2n}}{5^{n+1}}.$$

b) Finn konvergensområdet til rekka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n \cdot (2n)!}$.

c) Vis at Maclaurinrekka til $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$ (og $f(0) = 0$) er lik $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$.
Bruk potensrekka til f til å finne $f^{(4)}(0)$.

d) Finn potensrekka til $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ og bestem summen av rekka i b). (Hvis denne summen blir et integral, så er det ikke meningen du skal løse dette integralet.)

OPPGAVE 4

Funksjonen f er kontinuerlig og periodisk med periode 2π og grafen er symmetrisk om y-aksen. I intervallet $\langle 0, \pi \rangle$ er f gitt ved $f(x) = \pi - x$.

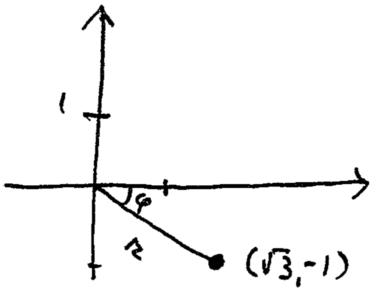
a) Bestem Fourierrekka til $f(x)$.

b) Tegn grafen til summen av rekka i intervallet $[-3\pi, 3\pi]$. Er summen alltid lik $f(x)$? La g være funksjonen $g(x) = \pi - x,\ 0 < x < \pi$. Tegn grafen til summen av Fourier sinus rekka i intervallet $[-3\pi, 3\pi]$ uten å beregne koeffisientene i Fourier sinus rekka.

c) Bruk Fourierrekka til $f(x)$ til å finne summen av rekka $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

Oppg. 1 $\quad -\cos 4t + \sqrt{3}\sin 4t = r\sin(4t+\varphi)$ der

a)



$$r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = -30^\circ \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow -\cos 4t + \sqrt{3}\sin 4t = \underline{\underline{2\sin\left(4t - \frac{\pi}{6}\right)}}$$

Perioden er: $4T = 2\pi \Rightarrow \underline{\underline{T = \frac{\pi}{2}}}$, Amplituden: $\underline{\underline{r = 2}}$

b) $\quad 4y'' + 12y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Kar. ligning: $\quad 4r^2 + 12r + 9 = 0 \iff (2r+3)^2 = 0$

dvs $\quad 2r + 3 = 0, \quad \underline{\underline{r = -\frac{3}{2}}}$ er en dobbeltrot

(eller bruk formel for røttene i en 2gradsligning.)

Løsninger:

$$\underline{e^{-\frac{3}{2}t}} \text{ og } \underline{te^{-\frac{3}{2}t}}.$$

Generell løsn. $\quad y = (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{3}{2}t}$

$$y' = c_2 e^{-\frac{3}{2}t} + (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{3}{2}t}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$$

Får:

$$y(0) = c_1 = 0$$

$$y'(0) = c_2 - \frac{3}{2}c_1 = 1$$

$$\iff c_1 = 0, \ c_2 = 1$$

Løsningen av initialverdiproblemet er: $\quad \underline{\underline{y = te^{-\frac{3}{2}t}}}$

Oppg. 2 $\quad z = f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 9x^2 - 3y + 5$

a) $\quad \underline{\underline{z_x = 6x^2 - 18x}}, \quad \underline{\underline{z_y = 3y^2 - 3}}$

$$z_{xx} = \underline{\underline{12x - 18}}, \quad \underline{\underline{z_{xy} = z_{yx} = 0}}, \quad \underline{\underline{z_{yy} = 6y}}$$

b) $\quad f(1,1) = 2 + 1 - 9 - 3 + 5 = -4 \Rightarrow (1,1,-4)$ ligger på F

Tangentplanet $z-(-4) = z_x(1,1)(x-1) + z_y(1,1)(y-1)$

dvs $z+4 = -12(x-1) - 0\cdot(y-1) = -12x+12$

dvs $\underline{\underline{z = -12x+8}}$

Hvis (x_0, z_0) passer i denne lign., så vil (x_0, y, z_0) også passe uansett hva du velger for y $\Rightarrow$ planet er parallelt med y-aksen

c)

$c = f(0.5, 2) = 2\cdot\frac{1}{2^3} + 2^3 - 9\cdot\frac{1}{2^2} - 3\cdot 2 + 5 = \underline{\underline{5}}$

Med $dx = 0.04$ og $dy = 0.03$, så får vi:

Max. usikkerhet i c: $|z_x(0.5,2)\,dx| + |z_y(0.5,2)\,dy|$

$= |-7.5\cdot 0.04| + |9\cdot 0.03| = 0.30 + 0.27 = \underline{\underline{0.57}}$

dvs $c = \underline{5.00 \pm 0.57}$

d) Kritiske punkter: $z_x = 0$ og $z_y = 0$ $\Leftrightarrow$

$6x(x-3) = 0$ og $3(y^2-1) = 3(y-1)(y+1) = 0$

Løsninger: $(x,y) = \underline{\underline{(0,1), (0,-1), (3,1), (3,-1)}}$

Type? $\Delta = z_{xx}\cdot z_{yy} - z_{xy}^2 = \underline{6\cdot(2x-3)\cdot 6y}$

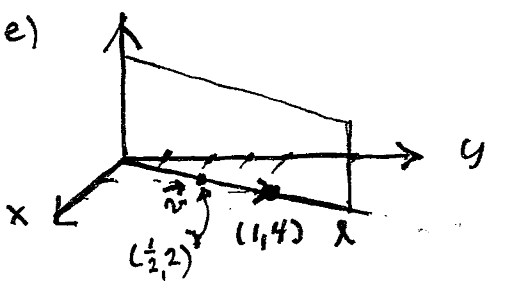
$(0,1) \Rightarrow \Delta = 6\cdot(-3)\cdot 6 < 0 \Rightarrow$ $\underline{\underline{(0,1)\text{ et sadelpunkt}}}$

$(0,-1) \Rightarrow \Delta = 6\cdot(-3)\cdot 6\cdot(-1) > 0$, $z_{xx} = -18 < 0 \Rightarrow$ $\underline{\underline{(0,-1)\text{ max.pkt}}}$

$(3,1) \Rightarrow \Delta = 6\cdot 3\cdot 6 > 0$, $z_{xx} = 18 > 0 \Rightarrow$ $\underline{\underline{(3,1)\text{ er et min. pkt}}}$

$(3,-1) \Rightarrow \Delta = 6\cdot 3\cdot 6(-1) < 0 \Rightarrow$ $\underline{\underline{(3,-1)\text{ et sadelpunkt}}}$

e)



$(1,4,z)$ passer i planets lign. $(4x-y=0)$ uansett valg av $z \Rightarrow$ det er et vertikalplan og

$\vec{v} = [1,4]$ = retn. vektor for ℓ.

Stigm. tallet (med voksende verdier av x) til tangenten = den retningsderiverte $\underbrace{\text{i retning } \vec{v}}_{\text{i } (\frac{1}{2},2)}$ $= \nabla f(\frac{1}{2},2)\cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$$= \left[z_x(\tfrac{1}{2},2),\ z_y(\tfrac{1}{2},2)\right]\cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \underset{\text{Se c}}{=} [-7.5,\ 9]\cdot \frac{[1,4]}{\sqrt{1^2+4^2}} = \frac{-7.5+36}{\sqrt{17}} = \frac{57}{2\sqrt{17}}$$

Oppg. 3

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n\sqrt{n}+7n^2}$. $a_n = \frac{n^2}{n\sqrt{n}+7n^2} = \frac{1}{\frac{n\sqrt{n}}{n^2}+7}$

Ser at $a_n = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}+7} \longrightarrow \frac{1}{0+7} = \frac{1}{7} \neq 0. \implies$

$\sum a_n$ divergerer etter divergenskriteriet

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9\cdot 2^{2n}}{5^{n+1}}$. La $b_n = \frac{9\cdot 2^{2n}}{5^{n+1}}$. Da vil

$$b_{n+1}\cdot \frac{1}{b_n} = \frac{9\cdot 2^{2n+2}}{5^{n+2}}\cdot \frac{5^{n+1}}{9\cdot 2^{2n}} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$$

geom. rekke! fordi $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ er uavhengig av n

Den geom. rekka er konvergent fordi $k = \frac{4}{5} < 1$ $\quad (|k|<1)$

Rekkas sum er

$$s = \frac{b_1}{1-k} = \frac{\frac{9\cdot 2^2}{5^2}}{1-\frac{4}{5}} = 5\cdot\frac{9\cdot 4}{5^2} = \frac{36}{5}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\cdot \frac{x^{2n}}{n\cdot(2n)!}$. La $a_n = (-1)^{n-1}\cdot \frac{x^{2n}}{n\cdot(2n)!} \implies$

$$\left|a_{n+1}\cdot \frac{1}{a_n}\right| = \frac{x^{2n+2}}{(n+1)\cdot(2n+2)!}\cdot \frac{n\cdot(2n)!}{x^{2n}} = \frac{n\cdot x^2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n)}{(n+1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n)(2n+1)(2n+2)}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n x^2}{(n+1)(2n+1)\cdot(2n+2)} \to 0 \text{ når } n\to\infty.$$

Rekka konv. for alle x etter forholdskrit

$\Rightarrow$ konv. området er alle reelle tall

c) Vet $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow 1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots - (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

Dette er Mac. rekka det spørres etter $\left((-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}\right)$

Mac. rekka er også gitt ved

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \quad \text{der } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Fordi x^4-leddet i Mac. rekka mangler, så må

$$a_4 = 0 \Rightarrow f^{(4)}(0) = a_4 \cdot 4! = 0$$

d) Integrerer Mac. rekka til $f(x)$ ledd for ledd og får

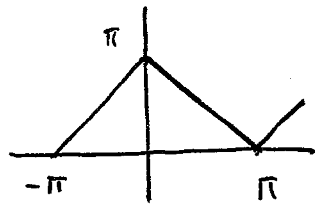
$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n) \cdot (2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

Altså er $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n \cdot (2n)!} = \int_0^x f(t)\,dt \Rightarrow$ ganger med 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n \cdot (2n)!} = 2\int_0^x f(t)\,dt = 2\int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,dt$$

Oppg. 4

a)



Sym. om y-aksen $\Longrightarrow$ $\underline{\underline{b_m = 0}}$ og

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{1}{\pi}\cdot\text{"areal"} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos mx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi-x)\underbrace{\cos mx\,dx}_{\text{int}} = \frac{2}{\pi}\left[(\pi-x)\frac{\sin nx}{m} - \int\frac{\sin mx}{m}(-1)dx\right]_0^\pi$$

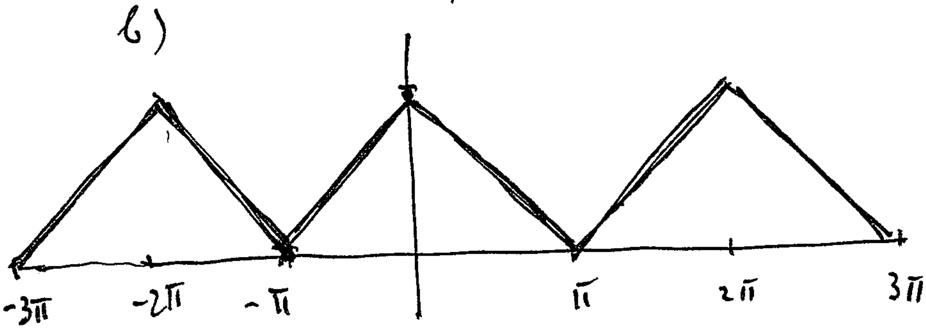
$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_0^\pi \sin mx\,dx = \frac{2}{\pi n}\cdot\left[\frac{-\cos mx}{m}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi n}\,\frac{1-\cos m\pi}{m}$$

$$\text{dvs}\quad a_m = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos m\pi}{m^2} = \underline{\underline{\begin{cases} 0 & \text{når } m = 2k \\ \frac{4}{\pi n^2} & \text{når } m = 2k-1 \end{cases}}}$$

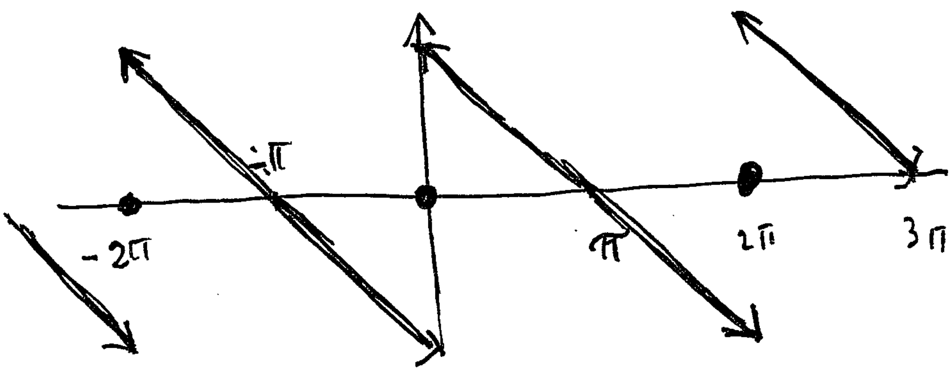
Fourierrekka er:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n\cos mx = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_{2k-1}\cos(2k-1)x = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}}}$$

b)



Summen er alltid (dvs for alle x) lik f(x) fordi f er kont. for alle x



Grafen til summen ~~er~~ Fourier sinus rekka er sym. om origo! (middelverdi i diskont. punktene)

ⓒ Sett $x = 0$ inn i Fourier rekka i ⓐ. $\cos 0 = 1$ gir

$$f(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\cdot\sum\frac{1}{(2k-1)^2}$$, Får

$$\frac{4}{\pi}\cdot\sum\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sum_{k=1}^\infty\frac{1}{(2k-1)^2} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{8}}}$$