Eksamen 3.12.10 i Ma 2000 for bygg/maskin

OPPGAVE 1

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen $y'' + 2y' + 5y = 0$.

b) Vi tenker oss at $y = y(t)$ i differensiallikningen i a) er avstanden fra likevektsstillingen for en svingende fjær. Fjæren er satt i bevegelse ved tiden $t = 0$ ved initialkravet $y(0) = -3$ og $y'(0) = 9$. Vis at

$$y(t) = 3e^{-t}(-\cos 2t + \sin 2t)$$

og skriv svaret på formen $Ae^{-t}\sin(\omega t + \varphi)$. Hva er perioden til denne svingningen?

OPPGAVE 2

a) Undersøk om rekkene $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+6}{n^2 + n^{3/2} + 3}$ og $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$ konvergerer eller divergerer.

b) Finn summen av rekkene $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{(2n)}$ og $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{(2n-1)}$ når $|x| < 1$.

Vis at $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{(2n-1)}} = \frac{8}{9}$.

OPPGAVE 3

a) La $g(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x}$, $x \neq 0$ og $g(0) = 0$. Bruk potensrekka til $\sin x$ til å finne Maclaurinrekka til $g(x)$. Ta med det generelle leddet. For hvilke x konvergerer rekka og hva er rekkas sum?

b) Finn $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ og skriv svaret som summen av en konvergent rekke. Anslå feilen vi gjør ved å erstatte $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ med de 4 første leddene i rekka.

OPPGAVE 4

Vi betrakter funksjonen f gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{for } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{for } 1 \leq t < 3 \end{cases}$$

a) La $S(t)$ være summen av Fourier sinus rekka til f. Skisser grafen til $S(t)$ i intervallet $\langle -3, 8]$. Hva blir $S(1)$?

b) Vis at $S(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n t}{3}\right)$ der $b_n = \dfrac{12}{(\pi n)^2}\sin\left(\dfrac{\pi n}{3}\right) - \dfrac{4}{\pi n}\cos\left(\dfrac{\pi n}{3}\right)$.

OPPGAVE 5

Gitt funksjonen $z = f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - 2y^3 + 4y$.

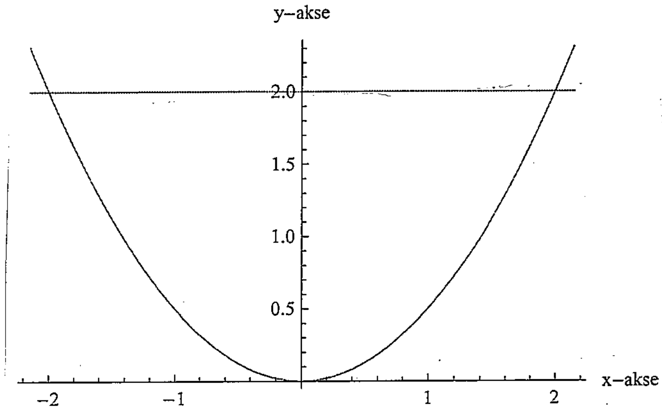
a) Bestem alle partielle deriverte av 1. og 2. orden til $z = f(x,y)$.

b) Grafen til $z = f(x,y)$ framstiller en flate. Vis at punktet $(1,0,-1)$ ligger på flaten. Bestem ligningen for tangentplanet til flaten i $(1,0,-1)$.

c) Vi befinner oss i punktet $(1,0,-1)$ og har tenkt å bevege oss langs den brattest mulige kurven C på flaten. I hvilken retning må vi gå og hva er stigningstall til tangenten til C i denne retningen? I hvilke retninger må vi gå for å bevege oss på samme horisontale nivå?

d) Finn de kritiske punktene til $z = f(x,y)$ og angi deres type.

e) Kurvene $x^2 = 2y$ og $y = 2$ avgrenser et område D i xy-planet (randa er inkludert). Finn absolutt maksimum og minimum av funksjonen $f(x,y)$ når vi lar D være definisjonsområde for f.



LØSNINGSFORSLAG Ma 2000 des 2010 Bygg/Maskin

① a) $r^2+2r+5=0$ Røtter $r=-1\pm 2i$, $e^{(-1+2i)t}=\underline{e^{-t}\cdot e^{i2t}}$

Gen. løsning : $y = e^{-t}\underline{\underline{(c_1\cos 2t + c_2 \sin 2t)}}$

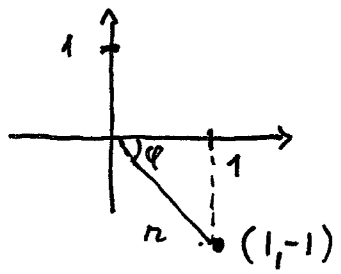
b) $y = e^{-t}(c_1\cos 2t + c_2 \sin 2t) \Rightarrow y(0) = \underline{c_1 = -3}$

$y' = -e^{-t}(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t) + e^{-t}(-c_1 \sin 2t\cdot 2 + 2c_2\cos 2t)$

$\Rightarrow y'(0) = -c_1 + 2c_2 = 9$, dvs $2c_2 = 9 + c_1 = 6 \Rightarrow \underline{c_2 = 3}$

Altså : $y = y(t) = e^{-t}(-3\cos 2t + 3\sin 2t)$

$= 3e^{-t}(-\cos 2t + \sin 2t)$



Med r og φ som på fig, så vil

$r = \sqrt{2}$ og $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ $(-45°)$ $\Rightarrow$

$\sin 2t - \cos 2t = r\sin(2t - \frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow y(t) = \underline{\underline{3\sqrt{2}\cdot e^{-t}\sin(2t-\frac{\pi}{4})}}$

Perioden er

$2T = 2\pi \Rightarrow \underline{\underline{T=\pi}}$

② a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}+6}{n^2+n^{3/2}+3}$ La $b_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n}+6)n^{3/2}}{n^2+n^{3/2}+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+6n^{3/2}}{n^2+n^{3/2}+3} = 1$

$\Rightarrow \sum a_n$ konvergerer fordi $\sum b_n$ konv. (p-rekke, $p=3/2$)

$\sum \dfrac{3^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$. La $a_n = \dfrac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$. Bruker forholdstesten :

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3^{n+1}\cdot((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\dfrac{(2n)!}{3^n\cdot(n!)^2} = 3\cdot\left(\dfrac{(n+1)!}{n!}\right)^2\cdot\dfrac{(2n)!}{(2n+2)!}$

$= 3\cdot\left(\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdots n(n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\right)^2\cdot\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdots 2n}{1\cdot2\cdot3\cdots 2n(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{3\cdot(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \dfrac{3}{4}$

når $n\to\infty$

Rekka konvergerer fordi $\frac{3}{4} < 1$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \underline{\underline{\frac{1}{1-x^2}}}$ (geom. rekke)

Deriverer (som er lov når $|x|<1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2n x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n x^{2n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \div\frac{\div 2x}{(1-x^2)^2} = \underline{\underline{\frac{2x}{(1-x^2)^2}}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n-1} = \frac{x}{(1-x^2)^2}, \quad |x|<1. \qquad x = \tfrac{1}{2} \text{ gir:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{2n-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{16}} = \underline{\underline{\frac{8}{9}}}$$

3 a) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$

Erstatter x med x^2. Får

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2\cdot(2n+1)}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x^2 \in \mathbb{R}, \text{ dvs. alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} = \underline{\underline{x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} + \cdots (-1)^n \cdot \frac{x^{4n+1}}{(2n+1)!} + \cdots}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Regningen over er gyldig (også for $x=0$ fordi $g(0)=0$) for alle x. Derfor konv. rekka til høyre for alle x og den har $g(x)$ (også for $x=0$) som sum.

b) $\int_0^x g(x)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6\cdot 3!} + \frac{x^{10}}{10\cdot 5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)(2n+1)!} + \cdots$

$$\Rightarrow \int_0^1 g(x)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{1}{6\cdot 3!} + \frac{1}{10\cdot 5!} - \frac{1}{14\cdot 7!} + \frac{1}{18\cdot 9!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(4n+2)(2n+1)!} + \cdots}}$$

Tar vi med 4 ledd, så vil feilen være mindre enn 1. utelatte ledd (og "med fortegn som 1. utelatte ledd"), dvs

$$|\text{feilen}| \le \underline{\underline{\frac{1}{18\cdot 9!}}} \qquad \text{der "feilen" = restleddet.}$$

Mer nøyaktig hvis

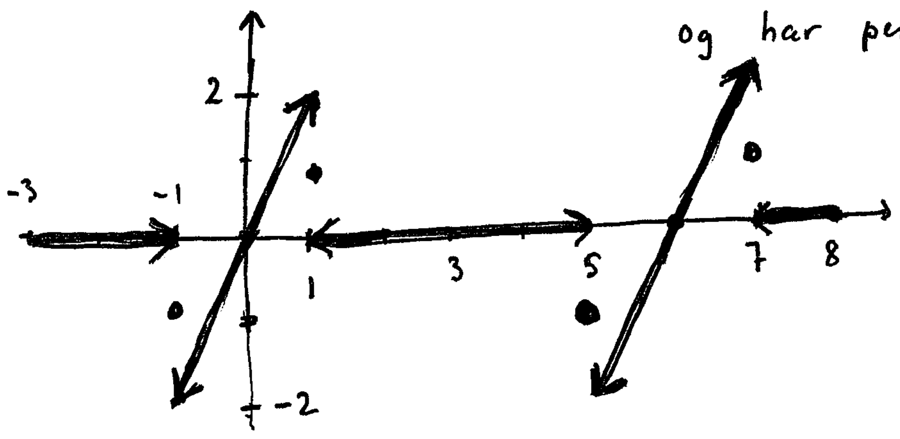
$$s_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6\cdot 3!} + \frac{1}{10\cdot 5!} - \frac{1}{14\cdot 7!}$$

Så vil

$$\underline{\underline{s_4 < \int_0^1 g(x)dx < s + \frac{1}{18\cdot 9!}}}$$

④

a) Grafen til Fourier sinus rekken er symm. om origo og har periode $T = 6$, dvs



Får at

$S(1) =$ "middelverdien", dvs

$$\underline{\underline{S(1) = 1}}$$

b) Fourier sinus rekka: $a_0 = 0$ og $a_m = 0$ for $m \geq 1$.

$$b_m = \frac{4}{6}\int_0^3 f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{6}mt\right)dt = \frac{2}{3}\int_0^1 2t\underbrace{\sin\left(\frac{\pi n}{3}t\right)}_{\text{int}}dt =$$

$$\frac{2}{3}\left[2t\cdot\frac{-\cos\left(\frac{\pi n}{3}t\right)}{\frac{\pi n}{3}} - \int\frac{-\cos\left(\frac{\pi n}{3}t\right)}{\frac{\pi n}{3}}\cdot 2\,dt\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(-\frac{6}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{6}{\pi n}\int_0^1\cos\left(\frac{\pi n}{3}t\right)dt\right)$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{3} + \frac{4}{\pi n}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}t\right)}{\frac{\pi n}{3}}\Bigg|_0^1 = \underline{\underline{-\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{3} + \frac{12}{(\pi n)^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}}$$

Fourier sinus rekka til f (med sum $S(t)$) er: $S(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{3}t\right)$

der b_m er beregnet over.

⑤ $z = x^2y^2 - x^2 - 2y^3 + 4y \implies$

a)

$z_x = \underline{\underline{2xy^2 - 2x}}$, $z_y = \underline{\underline{2x^2y - 6y^2 + 4}}$

$z_{xx} = \underline{\underline{2y^2 - 2}}$, $z_{yy} = \underline{\underline{2x^2 - 12y}}$, $z_{xy} = z_{yx} = 2x\cdot 2y = \underline{\underline{4xy}}$

b) $f(1,0) = 0 - 1^2 - 0 = -1 \implies$ $\underline{\underline{(1,0,-1)}}$ ligger på flaten

Tangentplanet: $\nabla f(1,0) = [z_x(1,0), z_y(1,0)] = [-2,4]$

Ligning $z - (-1) = -2(x-1) + 4(y-0) \iff \underline{\underline{z = -2x + 4y + 1}}$

c) $\nabla f(1,0) = \underline{\underline{[-2,4]}}$ som gir oss retningen med max stign.

Stign. tallet til tangenten: $|\nabla f(1,0)| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = \underline{\underline{2\sqrt{5}}}$

(eller stign. tall $D_{\vec{e}}(f) = \nabla f(1,0)\cdot\frac{[-2,4]}{\sqrt{2^2+4^2}} = [-2,4]\cdot[-2,4]/2\sqrt{5} = \underline{\underline{2\sqrt{5}}}$)

Retningen hvor flaten stiger mest er $[-2,4] = 2[-1,2]$, dvs. retningen er også gitt ved $[-1,2]$. Vet at $\nabla f(1,0)$ står normalt på nivåkurven $z=-1$ i $(1,0)$. Denne nivåkurven svarer til kurven på flaten gjennom $(1,0,-1)$ "på samme horisontale nivå". Retningene $\vec{m} = [a,b]$ vi søker er derfor tangent til nivåkurven $z=-1$ i $(1,0)$

dvs. $\nabla f(1,0) \cdot \vec{m} = 0 \Leftrightarrow [-1,2]\cdot[a,b] = 0 \Leftrightarrow$

$$-a + 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

$$\Rightarrow \quad \vec{m} = [a,b] = [2b,b] = b[2,1]$$

Så retningen $[2,1]$, og den motsatte retn. $-[2,1] = [-2,-1]$ er retninger for å bevege oss på samme horisontale nivå.

d) $z_x = 2x(y^2-1) = 0 \Leftrightarrow x=0, y=1, y=-1$. Setter hver av disse inn i $z_y = 0$

$x=0$ gir $-6y^2+4 = 0 \Leftrightarrow 6y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$y=1$ gir $2x^2-6+4=0 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$y=-1$ gir $-2x^2-6+4=0 \Leftrightarrow x^2=-1$. Ingen.

De kritiske punktene er: $(0,\sqrt{\frac{2}{3}})$, $(0,-\sqrt{\frac{2}{3}})$, $(1,1)$ og $(-1,1)$

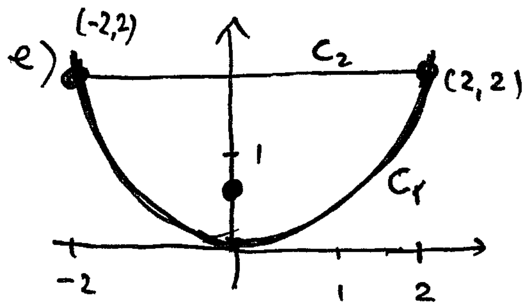
$$\Delta = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = (2y^2-2)(2x^2-12y) - (4xy)^2$$

$\Delta(1,1) = -4^2 = -16 < 0 \Rightarrow (1,1)$ sadelpunkt

$\Delta(-1,1) = -4^2 \Rightarrow (-1,1)$ sadelpunkt

$\Delta(0,\sqrt{\frac{2}{3}}) = (2\cdot\frac{2}{3}-2)(-12\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}) = 8\sqrt{\frac{2}{3}} > 0$, $z_{xx} < 0 \Rightarrow$ $(0,\sqrt{\frac{2}{3}})$ er max.pkt

$\Delta(0,-\sqrt{\frac{2}{3}}) = -8\sqrt{\frac{2}{3}} < 0 \Rightarrow$ $(0,-\sqrt{\frac{2}{3}})$ sadelpunkt e)



Fra d)

lokalt max i $(0, \sqrt{\frac{2}{3}})$ og

$$z_{max} = \underline{\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}} \quad (<3)$$

$\boxed{\text{Langs } C_1}$ er $x^2 = 2y$. Innsatt i

$$z = x^2y^2 - x^2 - 2y^3 + 4y \quad . \text{ Får}$$

$$z = 2y \cdot y^2 - 2y - 2y^3 + 4y \iff z = 2y \iff z = x^2$$

La $f_1(x) = x^2$, $-2 \le x \le 2$. Må finne max/min av f_1

$$f_1'(x) = 2x \quad , \quad f_1'(x) = 0 \iff x = 0$$

3 steder hvor f_1 kan ha max/min, $x=0$, $x=2$, $x=-2$

$f_1(x) = x^2$ gir $(f_1)_{max} \underline{= 4}$ når $x = 2$ og $x = -2$

$(f_1)_{min} \underline{= 0}$ når $x = 0$

$\boxed{\text{Langs } C_2}$ Her er $y = 2$. Innsatt i $z = f(x,y)$:

$$z = x^2 \cdot 4 - x^2 - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 = 3x^2 - 8$$

dvs må finne max/min av $f_2(x) = 3x^2 - 8$, $-2 \le x \le 2$

$$f_2'(x) = 3 \cdot 2x = 0 \iff x = 0$$

3 steder $x = 0$, $x = 2$ og $x = -2$, men $x = 2$ på C_2 er punktet $(2,2)$ som også ligger på C_1. $x = -2$ på C_2 er punktet $(-2,2)$ —— " ——. Så bare et nytt punkt, nemlig $x = 0$ på C_2. Her er $\underline{f_2(0) = -8}$

$$\Rightarrow (f_2)_{min} = -\underline{8}$$

Tilsammen gir dette oss disse punktene hvor vi kan ha abs. max/min. :

$$(0, \sqrt{\tfrac{2}{3}}), \ (0,0), \ (2,2), \ (-2,2) \text{ og } (0,2)$$

Abs. max.punkter er $\underline{\underline{(-2,2) \text{ og } (2,2)}}$, $f_{max} \underline{= 4}$

Abs. min punkt er $\underline{\underline{(0,2)}}$, $f_{min} \underline{= -8}$