HØGSKOLEN I OSLO
OG AKERSHUS

Fakultet for teknologi, kunst og design
Teknologiske fag

Eksamen i: Ma 2000 for bygg og maskin

Målform: Bokmål

Dato: 05.12.2011

Tid: 5 timer / kl. 0900-1400

Antall sider (inkl. forside): 3 + formelark

Antall oppgaver: 5

Tillatte hjelpemidler: INGEN

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig.
Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Besvarelsen skal merkes med kandidatnummer, ikke navn.
Bruk blå eller sort kulepenn på innføringsarket.

Faglig veileder: Jan O. Kleppe

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Instituttleders/ Programkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Instituttleder/ Programkoordinator	
Jan O. Kleppe	Johan Havnen		Tomas Syrstad Ruud	Tomas S. Ruud

Emnekode: FO 020B, FO 020M

OPPGAVE 1

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen $y'' + 9y = 18t + 9$.

b) Vis at $y = t \sin 3t$ tilfredsstiller differensiallikningen $y'' + 9y = 6 \cos 3t$, og bruk dette til å løse initialverdiproblemet (hvor $y = y(t)$):

$$y'' + 9y = 6 \cos 3t \ , \quad y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = 3 \ .$$

Hvis differensiallikningen modellerer bevegelsen i et svingende system, hva skjer med svingningene når tiden går? Hva kalles dette fenomenet?

OPPGAVE 2

Gitt en flate F som er grafen til funksjonen $z = f(x, y) = x^2y - 4xy + y^2$.

a) Regn ut de partielt deriverte av første og andre orden til $z = f(x, y)$.
Finn tangentplanets ligning i punktet $(2, 1, -3)$ på flaten F.

b) Vi befinner oss i punktet $Q = (2, 1, -3)$. I hvilken retning må vi gå hvis vi har tenkt å bevege oss langs den brattest mulige kurven på F? Finn også stigningstallet til tangenten i Q til kurven gjennom Q på F i retningen $[12, 5]$.

c) Bestem de kritiske punktene til funksjonen $z = f(x, y)$, og klassifiser dem (dvs. angi deres type).

d) En kurve D på F er gitt ved at vi lar (x, y) variere langs kurven $y = x^2$. Finn minimum av $z = f(x, y)$, med tilhørende x-verdi, langs D.

OPPGAVE 3

a) Undersøk om rekka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n + 1)!}{2^n \cdot (2n)!}$ konvergerer eller divergerer.

Er rekka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n + 1}{n^2}$ absolutt konvergent, betinget konvergent eller divergent?

b) Bestem konvergensradien til potensrekka $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n(n + 1)}$.

OPPGAVE 4

a) Finn Maclaurinrekkene til e^{x^3} og $x^2e^{x^3}$, og vis at Maclaurinrekka til $\displaystyle\int_0^x t^2e^{t^3}\,dt$ er:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+3}}{(n + 1)! \cdot 3} \ .$$

Hva er sammenhengen mellom Maclaurinrekkene til e^{x^3} og $\displaystyle\int_0^x t^2e^{t^3}\,dt$?

b) Finn potensrekka for $\int_{-x}^{0} t^2 e^{t^3}\,dt$ og ei tallrekke som har $\int_{-1}^{0} x^2 e^{x^3}\,dx$ som sum. Hvor mange ledd må du ta med i den siste rekka for at feilen skal bli mindre enn 10^{-3}?

OPPGAVE 5

Funksjonen $f(x) = |\sin x|$ er periodisk.

a) Vis ved regning at $f(x)$ er en jevn funksjon (så grafen til f er symmetrisk om y-aksen) og at $f(x+\pi) = f(x)$. Vis at Fourierrekka til $f(x)$ er

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}\ .$$

Du kan få bruk for følgende: $\sin u \cos v = \frac{1}{2}\big(\sin(u+v) + \sin(u-v)\big)$.

b) Bruk Fourierrekka fra punkt 5a til å bestemme summen av rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n^2-1}\ .$$

LØSNINGSFORSLAG, Eksamen 5.12.2011. Ma2000

bygg og maskin

Oppg. 1 a) $y'' + 9y = 18t + 9$

Kar. ligm. $r^2 + 9 = 0 \iff r = \pm 3i$

Løsning: $e^{i3t} = \cos 3t + i \sin 3t$

Gen. løsn. av $y'' + 9y = 0$

$$y_h = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$$

Søker part. løsn. av formen

$$y_p = at + b \quad , \; y_p'' = 0 \quad \text{innsatt}$$

$$9at + 9b = 18t + 9b \iff a = 2, b = 1$$

Gen. løsn. av gitt diff. l:

$$y = y_h + y_p = \underline{\underline{c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t + 2t + 1}}$$

b) $y'' + 9y = 6 \cos 3t$

$y_p = t \sin 3t$ er en løsning fordi

$$y_p' = \sin 3t + 3t \cos 3t \quad , \; y_p'' = 3\cos 3t + 3\cos 3t - 9t \sin 3t$$

gir innsatt:

$$y'' + 9y = 6\cos 3t - 9t \sin 3t + 9t \sin 3t = 6 \cos 3t \quad \text{OK}$$

Generell løsn. er derfor

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t + t \sin 3t$$

$$y(0) = c_1 = 0 \implies$$

$$y = c_2 \sin 3t + t \sin 3t \implies y' = 3c_2 \cos 3t + \sin 3t + 3t \cos 3t$$

$$y'(0) = 3c_2 = 3 \iff c_2 = 1$$

Løsning: $y = \underline{\underline{\sin 3t + t \sin 3t}}$. Når $t \to \infty$, går amplituden av svingningene mot $\underline{\underline{\infty}}$

Vi får RESONANS

Oppg. 2 $\quad z = f(x,y) = x^2y - 4xy + y^2$

a) $z_x = \underline{\underline{2xy - 4y}}$, $z_y = \underline{\underline{x^2 - 4x + 2y}}$

$z_{xx} = \underline{\underline{2y}}$, $z_{xy} = z_{yx} = \underline{\underline{2x-4}}$, $z_{yy} = \underline{\underline{2}}$

Tangentplanets ligning i $(2,1,-3)$:

$$z-(-3) = (2\cdot 2\cdot 1 - 4\cdot 1)(x-2) + (2^2 - 4\cdot 2 + 2)(y-1)$$

$$z+3 = -2(y-1) \iff z = -2y + 2 - 3 \iff \underline{\underline{z = -2y-1}}$$

Merk at $(2,1,-3)$ ligger på flaten fordi $f(2,1) = 4-8+1 = -3$

b) $\nabla f(2,1) = [2xy-4y,\ x^2-4x+2y]_{(x,y)=(2,1)} = [0,-2] = 2[0,-1]$

Det er brattest i gradientens retning, dvs. i retn. $\underline{\underline{[0,-1]}}$

Stigningstallet er lik den retningsderiverte til f i $(2,1)$ i retningen $[12,5]$, dvs lik

$$\nabla f(2,1)\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad \text{der} \quad \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{[12,5]}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{1}{13}[12,5]$$

Stign. tallet er: $\nabla f(2,1)\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = [0,-2]\cdot[12,5]\cdot\frac{1}{13} = \underline{\underline{\frac{-10}{13}}}$

c) $z_x = z_y = 0 \iff$

$2y(x-2) = 0$ og $x^2 - 4x + 2y = 0$

$y=0$ gir $x^2 - 4x = 0 \iff x=0$ eller $x=4$

$x=2$ gir $2^2 - 4\cdot 2 + 2y = 0 \iff y = 2$

3 kritiske punkter : $\underline{\underline{(0,0)}}$, $\underline{\underline{(4,0)}}$, $\underline{\underline{(2,2)}}$

$\Delta = z_{xx}\cdot z_{yy} - z_{xy}^2 = 4y - (2x-4)^2$

$(0,0)$ gir $\Delta = 0 - (-4)^2 = -16 < 0$, dvs. $\underline{\underline{\text{sadelpunkt}}}$

$(4,0)$ gir $\Delta = 0 - (2\cdot 4 - 4)^2 = -16 < 0$, dvs. $\underline{\underline{\text{sadelpunkt}}}$

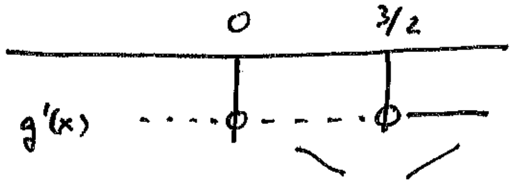
$(2,2)$ gir $\Delta = 4\cdot 2 - 0^2 = 8 > 0$, $z_{xx} = 4 > 0$, dvs. $\underline{\underline{\text{min. punkt}}}$

d) $y = x^2$ gir innsatt i $z = f(x,y)$:

$$f(x,x^2) = x^2 \cdot x^2 - 4x \cdot x^2 + x^4 = 2x^4 - 4x^3$$

Kaller denne

$$g(x) = 2x^4 - 4x^3$$
$$g'(x) = 8x^3 - 4 \cdot 3x^2 = 8x^2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$



$x = \frac{3}{2}$ gir min av g

$$g_{min} = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$$
$$= \frac{27}{8}\left(2 \cdot \frac{3}{2} - 4\right) = \underline{\underline{-\frac{27}{8}}}$$

<u>Oppg. 3</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ der $a_n = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot (2n)!}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+3)!}{2^{n+1} \cdot (2n+2)!} \cdot \frac{2^n \cdot (2n)!}{(2n+1)!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n+1)(2n+2)}(2n+3) \cdot (2n)!}{2 \cdot \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n+1)(2n+2)} \cdot (2n)! \cdot (2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+3}{2n+1} \longrightarrow \frac{1}{2} \text{ når } n \to \infty. \quad \frac{1}{2} < 1$$

Rekka <u>konv. etter forholdstest.</u>

Undersøker tallverdirekka

$\sum \frac{n+1}{n^2}$ $\quad a_n = \frac{n+1}{n^2}$. Sammenligner med $b_n = \frac{n}{n^2}$

Da $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$ og $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ er divergent

(p-rekke, $p = 1$), så vil $\sum a_n$ <u>divergere</u>.

Men $\sum (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2}$ konvergerer etter Leibniz

fordi $\frac{n+1}{n^2} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{n} \to 0$ når $n \to \infty$

og $c_{n+1} \le c_n$ (der $c_n = \frac{n+1}{n^2}$) for store n.

Rekka er derfor <u>betinget konvergent</u>

b) $\sum a_n$ der $a_n = (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2^n \cdot (n+1)}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \frac{x^{2n+2}}{2^{n+1} \cdot (n+2)} \cdot \frac{2^n \cdot (n+1)}{x^{2n}} \right| = \frac{x^2}{2}\, \frac{n+1}{n+2} \to \frac{x^2}{2}$$

når $n \to \infty$

Rekka konv. for $\frac{x^2}{2} < 1$, og div. for $\frac{x^2}{2} > 1$ etter forholdstesten, dvs. konverger når

$$x^2 < 2 \iff |x| < \sqrt{2} \iff \underline{-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}}$$

Konvergensradien er: $\underline{\underline{R = \sqrt{2}}}$

Oppg. 4 a) Vet $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$, $x \in \mathbb{R}$

Erstatter x med x^3. Får

$$e^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}}} = 1 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^6}{2!} + \frac{x^9}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 \cdot e^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n} \cdot x^2}{n!} = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{n!}}} = x^2 + \frac{x^5}{1!} + \frac{x^8}{2!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

Får

$$\int_0^x t^2 e^{t^3}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{x^{3n+3}}{3n+3} = \frac{1}{3} \cdot \sum \frac{x^{3n+3}}{n! \cdot (n+1)}$$

$$= \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+3}}{(n+1)! \cdot 3}}} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{2! \cdot 3} + \frac{x^9}{3! \cdot 3} + \dots + \frac{x^{3n}}{n! \cdot 3} + \dots$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!} = \frac{1}{3}\left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}\right)$$

hvorav $\underline{\underline{\text{denne}}}$ er $\underline{\text{rekka for } e^{x^3}}$

[Derfor er $\int_0^x t^2 e^{t^3}\, dt = \frac{1}{3}(e^{x^3} - 1)$, noe en også kunne innsett ved å substituere]

b) $\int_{-x}^{0} t^2 e^{t^3} dt = -\int_{0}^{-x} t^2 e^{t^3} dt$. Erstatter x med $-x$ i

rekka for $\int_0^x t^2 e^{t^3} dt$ fra a) og får

$$\int_{-x}^{0} t^2 e^{t^3} dt = -\frac{1}{3} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-x)^{3m}}{m!} = -\frac{1}{3} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{3m} \cdot \frac{x^{3m}}{m!}$$

$$= \underline{\underline{\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \cdot \frac{x^{3m}}{m! \cdot 3}}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

fordi $(-1)^{3m} = (-1)^{2m} \cdot (-1)^m$ og $(-1)^{2m} = 1$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} x^2 e^{x^3} dx = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \cdot \frac{1}{m! \cdot 3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2! \cdot 3} + \frac{1}{3! \cdot 3} - \frac{1}{4! \cdot 3} + \cdots$$

Rekka er alternerende. Feilen er mindre enn 1. utelatte ledd. Regner ut noen få ledd:

$$\frac{1}{5! \cdot 3} = \frac{1}{120 \cdot 3} = \frac{1}{360} \quad , \quad \frac{1}{6! \cdot 3} = \frac{1}{1080 \cdot 3} < 10^{-3}$$

Må ta med 5 ledd i rekka, dvs

$$\int_{-1}^{0} x^2 e^{x^3} dx \approx \underline{\underline{\frac{1}{3} - \frac{1}{2! \cdot 3} + \frac{1}{3! \cdot 3} - \frac{1}{4! \cdot 3} + \frac{1}{5! \cdot 3}}}$$

Oppg. 5 a) $f(x) = |\sin x|$

$f(-x) = |\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x)$, dvs.

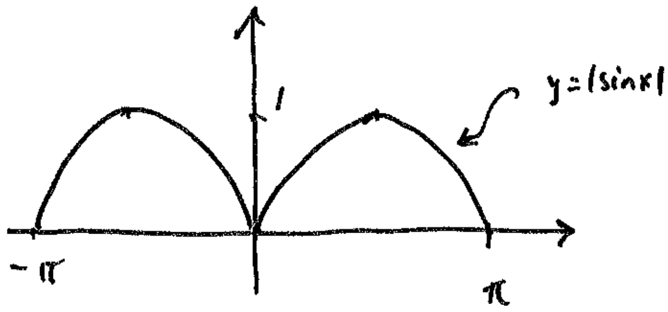
$f(x)$ er en $\underline{\underline{\text{jevn}}}$ (eller like) funksjon. Videre

$$f(x+\pi) = |\sin(x+\pi)| \underset{\uparrow}{=} |\sin(\pi - x - \pi)| = |\sin(-x)| = f(x)$$

bruker $\sin u = \sin(\pi - u)$

dvs. $f(x)$ er periodisk med $\underline{\text{periode } \pi}$ $(T = \pi)$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} [0+1] = \underline{\frac{2}{\pi}}$$



$$a_m = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x \cos\left(\frac{2\pi}{T}mx\right)dx$$

$$a_m = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x \cos(2mx)\,dx$$

Vet at

$$\sin x \cos(2mx) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+2mx) + \sin(x-2mx)\right) = \frac{1}{2}\sin((2n+1)x) - \frac{1}{2}\sin((2n-1)x)$$

$$\Longrightarrow \quad a_m = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/2}(\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x)\,dx\right] =$$

$$\frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{-\cos(2n+1)x}{2n+1} - \frac{-\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]_0^{\pi/2} =$$

$\cos(mx) = 0$ når m = oddetall

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2n-1-(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-2}{4n^2-1}$$

$b_m = 0$ for grafen er sym om y-aksen $\Longrightarrow$

Fourierrekka er

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}mx\right) = \underline{\underline{\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2mx)}{4m^2-1}}}$$

b) $f(x)$ er kont., så Fourierrekkas sum $= f(x)$

$x=0$ gir $\quad \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = f(0) = 0$

$$\Longrightarrow \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{2}{\pi} \Longrightarrow \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$x = \pi/2$ gir $\quad \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\cdot\frac{\pi}{2})}{4n^2-1} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$$\Longrightarrow \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} = 1 - \frac{2}{\pi}$$

$$\Longrightarrow \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{4m^2-1} = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}}$$