Eksamen Ma 2000 Bygg , 8.03.10

OPPGAVE 1

a) Skriv tallet $\frac{16}{(\sqrt{3}+i)^3}$ på normalform og $2(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$ på polar form.

b) La $z = 3(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18})$ og $w = (\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9})$. Skriv tallet $z \cdot w$ på normal form og tegn (dvs. plassere) tallene z, w og $z \cdot w$ i det komplekse planet.

c) Løs ligningen $z^7 = 64(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$ og skriv alle løsningene på polar form. Hvorfor har alle løsningene avstand 2 fra origo?

OPPGAVE 2

a) Finn den løsningen av differensiallikningen

$$y'' + 9y = 36e^{3x}.$$

som oppfyller kravene $y(0) = 3$ og $y'(0) = 9$.

b) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen $(D-2)^2y = 0$. Finn **formen** på en partikulærløsning til $(D-2)^2y = 3x^2e^{2x} + 5\sin 4x$. (Det er ikke meningen du skal finne den generelle løsningen av den inhomogene differensiallikningen).

OPPGAVE 3

En flate F er gitt som grafen til funksjonen $z = f(x,y) = xy^2 + \frac{4}{x} + \frac{y^3}{3}$.

a) Regn ut de partielt deriverte til f av første og andre orden. Vertikalplanet $x = 2$ skjærer F i en kurve C. Finn stigningstallet til tangenten til C i punktet $(2, 0, 2)$.

b) Finn ligningen til tangentplanet til F i punktet $(2, 0, 2)$. Skisser tangentplanet i et xyz-koordinatsystem.

c) Finn de kritiske punktene til f og angi deres type.

OPPGAVE 4

Temperaturen i et punkt (x, y, z) er $T = T(x, y, z)$, men selve funksjonsuttrykket for $T(x, y, z)$ kjenner vi ikke. Vi befinner oss i $P = (200, 300, 400)$ der x, y og z måles i m (meter) og de partielt deriverte av T måles i $°C/m$. I P måler vi temperaturen til å være 17 $°C$ og gradienten av T til å være $\nabla T = [0.2, 0.1, 0.3]$. Finn den retningsderiverte til T i P i retningen $\vec{v}$ der $\vec{v} = [1, 2, 2]$. Finn en tilnærmet verdi for temperaturen i punktet $(202, 304, 404)$.

OPPGAVE 5

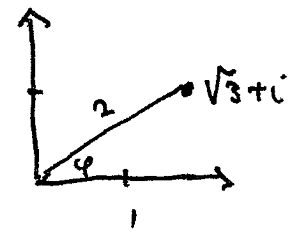
a) Avgjør om rekkene konvergerer eller divergerer:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2}{(n^3-6n)\sqrt{n}}$, ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n+1)!}$ og iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$.

b) Finn Maclaurinrekka til funksjonen $f(x) = x^2 - \sin(x^2)$ og bruk Maclaurinrekka til å beregne grenseverdien $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^2 - \sin(x^2)}$.

LØSNINGSFORSLAG Ma 2000 bygg ~~febr.~~ 8. mars 2010

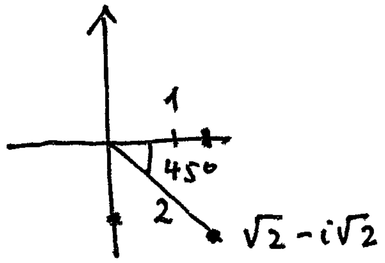
Oppg. 1 a) Har $\sqrt{3}+i = 2e^{i30^\circ}$



$$\Rightarrow (\sqrt{3}+i)^3 = 2^3 e^{i30^\circ \cdot 3} = 8e^{i90^\circ} = 8i$$

$$\Rightarrow \frac{16}{(\sqrt{3}+i)^3} = \frac{16}{8i} = \frac{2i}{i^2} = \underline{\underline{-2i}}$$

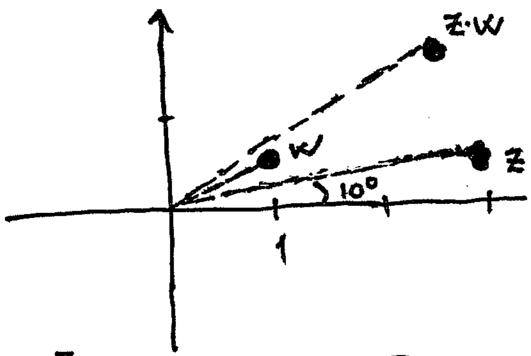
$\varphi = 30^\circ$



Får at $\sqrt{2}-i\sqrt{2} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{2}-i\sqrt{2}) = 4e^{i(2\pi-\frac{\pi}{4})} = \underline{\underline{4e^{i\frac{7\pi}{4}}}}$$

b) $z = 3e^{i\frac{\pi}{18}}$, $w = e^{i\frac{\pi}{9}}$ $\Rightarrow z\cdot w = 3e^{i(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{9})} = 3e^{i\frac{3\pi}{18}}$



dvs $z\cdot w = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \underline{\underline{\frac{3}{2}(\sqrt{3}+i)}}$

$$\left(\frac{\pi}{18} = \frac{180^\circ}{18} = 10^\circ\right)$$

c) $z^7 = 64(\sqrt{2}-i\sqrt{2}) = 2^6\cdot 2\cdot e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2^7 e^{i\left(\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right)}$

Løsningene er

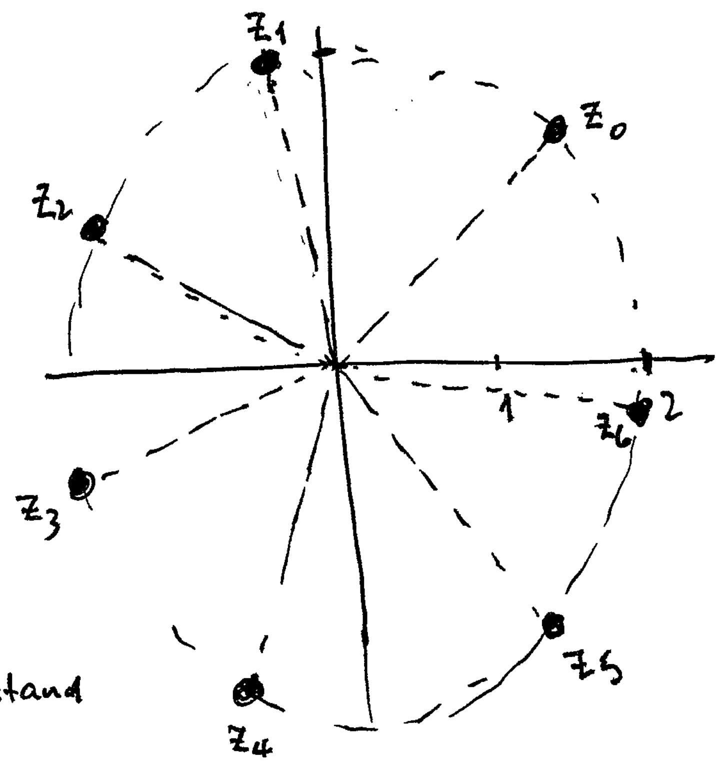
$$z = (2^7)^{\frac{1}{7}} e^{i\left(\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right)\frac{1}{7}}$$

dvs

$$z = z_k = \underline{\underline{2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{2\pi}{7}\right)}}}$$

der $\underline{\underline{k = 0,1,2,3,4,5,6}}$

$$\left(\frac{2\pi}{7} \approx 51.43^\circ\right)$$



Da alle løsn. er på form $2e^{i\varphi}$, så har alle løsn. avstand $\underline{2 \text{ fra origo}}$

Oppg. 2

a) $y'' + 9y = 36e^{3x}$

Løser $y'' + 9y = 0$. Kar. lign. $r^2 + 9 = 0$
$\Leftrightarrow r = \pm 3i$

Løsning $e^{i3x} = \cos 3x + i \sin 3x \implies$

$y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$. Søker part. løsn. av formen

$y_p = ae^{3x}$, $y_p'' = 3 \cdot 3ae^{3x}$. Innsatt: $9ae^{3x} + 9ae^{3x} = 36e^{3x}$
dvs. $18a = 36 \Rightarrow a = 2$

Generell løsning:

$y = y_h + y_p = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + 2e^{3x}$
$y' = -3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x + 6e^{3x}$
$\implies$ $y(0) = c_1 + 2 = 3$
$y'(0) = 3c_2 + 6 = 9$
dvs $c_1 = c_2 = 1$

Løsningen det spørres etter er $y = \cos 3x + \sin 3x + 2e^{3x}$

b) $(D-2)^2 y = 0$. Kar. ligning $(r-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$
$r = 2$ (dobbeltrot)

2 lin. uavhengige løsn.

e^{2x} og xe^{2x} $\implies$ Gen. løsn. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

Vet at $(D-2)^3 \cdot (3x^2 e^{2x}) = 0$ og $(D^2+16)(\sin 4x) = 0$

Anvender derfor $(D-2)^3 \cdot (D^2+16)$ på begge sider. Får

$$(D-2)^3 (D^2+16)(D-2)^2 y = (D-2)^3 (D^2+16)(5\sin 4x) + (D^2+16)(D-2)^3 (3x^2 e^{2x})$$

$$\Leftrightarrow (D-2)^5 \cdot (D^2+16) y = (D-2)^3 (0) + (D^2+16)(0) = 0$$

Kar. lign. $(r-2)^5 \cdot (r^2+16) = 0$

$\Leftrightarrow$ $r = 2$ (rot av mult. 5) og $r = \pm 4i$

Løsninger $e^{2x}, xe^{2x}, x^2 e^{2x}, x^3 e^{2x}, x^4 e^{2x}$, $e^{i4x} = \cos 4x + i \sin 4x$

med gen. løsn. $y = \underbrace{c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}}_{\text{løsn. av } (D-2)^2 y = 0} + c_3 x^2 e^{2x} + c_4 x^3 e^{2x} + c_5 x^4 e^{2x} + c_6 \cos 4x + c_7 \sin 4x$

$\Rightarrow$ Formen er $y_p = c_3 x^2 e^{2x} + c_4 x^3 e^{2x} + c_5 x^4 e^{2x} + c_6 \cos 4x + c_7 \sin 4x$

Oppg. 3 $\quad z = f(x,y) = xy^2 + \frac{4}{x} + \frac{y^3}{3} = xy^2 + 4\cdot x^{-1} + \frac{1}{3}y^3$

a) $z_x = y^2 - 4x^{-2} = \underline{\underline{y^2 - \frac{4}{x^2}}}$, $z_y = \underline{\underline{2xy + y^2}}$

$z_{xx} = -4(-2)x^{-3} = \underline{\underline{\frac{8}{x^3}}}$, $z_{yy} = 2x + 2y$

$z_{xy} = z_{yx} = \underline{\underline{2y}}$. I vertikalplanet $x = 2$ er x konst og y varierer, dvs stign. tallet til C er gitt ved z_y . Får $z_y\big|_{(x,y)=(2,0)} = 2\cdot 2\cdot 0 + 0^2 = \underline{\underline{0}}$

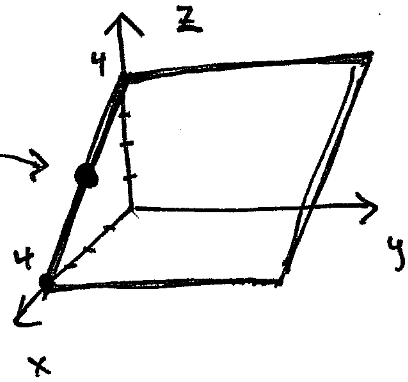
b) Tangentplanet i $(x,y,z) = (2,0,2)$ er gitt ved

$$z_x(2,0)\cdot(x-2) + z_y(2,0)\cdot(y-0) = z-2$$

dvs $\quad z-2 = -(x-2) + 0\cdot y \iff \underline{\underline{z = -x+4}} \iff x+z=4$

c) Kritiske punkter:

Tegner et utsnitt av tangent-planet



$z_x = z_y = 0$

$\iff$

$y^2 = \frac{4}{x^2}$

dvs $\quad \underline{y = \pm\frac{2}{x}}$

og $\quad \underline{(2x+y)y = 0} \iff y = 0$ eller $2x + y = 0$

$y = 0$ innsatt i $y = \pm\frac{2}{x}$ gir ingen løsn.

$y = -2x$ innsatt gir $\quad -2x = \pm\frac{2}{x} \iff x^2 = \mp 1 \iff x = \pm 1$

Får 2 kritiske punkter $(x,y) = \underline{\underline{(1,-2)}}$ og $(-1,2)$

$\Delta = z_{xx}\cdot z_{yy} - z_{xy}^2 = \frac{8}{x^3}\cdot 2(x+y) - 4y^2 = \frac{16(x+y)}{x^3} - 4y^2$

$\Delta(1,-2) = \frac{-16}{1} - 4\cdot 4 = -32 < 0$, dvs $(x,y) = \underline{\underline{(1,-2)}}$ er sadelpunkt

$\Delta(-1,2) = -16 - 4\cdot 4 = -32 < 0 \implies (x,y) = \underline{\underline{(-1,2)}}$ er sadelpunkt.

Oppg. 4 I $P = (200, 300, 400)$, så er $T = 17°C$ og
$\nabla T = [0.2, 0.1, 0.3]$

Den retningsderiverte til T i retn. $\vec{v} = [1,2,2]$ er:

$$\nabla T \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = [0.2, 0.1, 0.3] \cdot \frac{[1,2,2]}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3}(0.2+0.2+0.6) = \underline{\underline{\frac{1}{3}\ °C/m}}$$

Den retningsderiverte måler temperaturforandringen i retningen $\vec{v}$ per m. Da vektoren

$$[202, 304, 404] = [200, 300, 400] + 2 \cdot [1,2,2]$$
$$= [200, 300, 400] + 6 \cdot \frac{[1,2,2]}{3}$$

Så vil

$$T(202, 304, 404) \approx T(200, 300, 400) + 6 \cdot \frac{1}{3} = 17°C + 2°C = \underline{\underline{19°C}}$$

eller kanskje lettere slik:

Avstanden mellom punktene $(202, 304, 404)$ og $(200, 300, 400)$

er $d = \sqrt{(202-200)^2 + (304-300)^2 + (404-400)^2} = \sqrt{36} = 6$

dvs $d = 6$ m og vektoren mellom punktene er $2\vec{v}$

I denne retningen ($\vec{v}$ eller $2\vec{v}$) så er temperatur-forandringen $\frac{1}{3}$ °C/m, dvs. $\frac{1}{3}$ °C per meter.

Temperaturøkning over 6 m er $\approx \frac{1}{3} \cdot 6 = 2°C$

(lineær approksimasjon)

Derfor er

$$T(202, 304, 404) \approx 17°C + 2°C = \underline{\underline{19°C}}$$

Oppg. 5

a) i) $\sum \frac{5n^2}{(n^3-6n)\sqrt{n}}$. Sammenlignes med $\sum b_n$ der $b_n = \frac{5n^2}{n^3 \cdot n^{1/2}} = \frac{5}{n^{3/2}}$

Da $\sum \frac{5}{n^{3/2}} = 5 \cdot \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergerer (p-rekke med $p = 3/2$), så vil den gitte rekka konv. etter grensesammenlign. test.

ii) $\sum \frac{n^3}{(2n+1)!}$. La $a_n = \frac{n^3}{(2n+1)!} \implies$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{n^3} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1\cdot 2 \cdots (2n)(2n+1)}{1\cdot 2 \cdots (2n)(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \to 0 \text{ når } n \to \infty$$

Rekka konv. etter forholdstesten

(iii) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln n}$. Alternerende rekke. Rekka konv. etter Leibnitz fordi $\frac{1}{\ln n} \to 0$ når $n \to \infty$. (Dessuten: $n+1 > n \implies \ln(n+1) > \ln(n) \implies \frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n}$ som også er en forutsetn. for konv. etter Leibnitz)

b) Vet $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$, $\underline{x \in \mathbb{R}}$

$$\implies \sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\implies \sin(x^2) - x^2 = -\frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Gange begge sider med -1 og får Mac. rekka:

$$\underline{\underline{x^2 - \sin(x^2) = \frac{x^6}{3!} - \frac{x^{10}}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \cdots}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Får

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^2 - \sin(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^6}{x^6 \cdot \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \cdots\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{4n-4}}{(2n+1)!} + \cdots} = \frac{1}{\frac{1}{3!}} = 3! = \underline{\underline{6}}$$