Eksamen i Ma2000 for Bygg og Maskin, 3.12.2013

OPPGAVE 1

a) Skriv $\sqrt{3}\cos 5t - \sin 5t$ på formen $r\sin(\omega t + \varphi)$, dvs. bestem r, ω og φ slik at

$$\sqrt{3}\cos 5t - \sin 5t = r\sin(\omega t + \varphi) .$$

b) I enden av en vertikal fjær med fjærkonstant $k = 100$ og dempningskonstant $c = 20$ henger en metallkule med masse $m = 5$. Ved tiden $t = 0$ settes kule med fjær i bevegelse. Vi antar at vekten av fjæra er så liten at vi kan se bort fra den og at bevegelsen av fjær med kule er fri. La $y(t)$ være kulas avstand fra likevektsstillingen ved tiden t. Bestem $y(t)$ når $y(0) = 0$ og $y'(0) = 8$.

OPPGAVE 2

Gitt funksjonen $z = f(x,y) = x + y - \frac{1}{3}x^3 - x^2y - 2xy^2 - \frac{4}{3}y^3$. Grafen til f er en flate som vi kaller F.

a) Bestem alle partielle deriverte av første og andre orden til $z = f(x,y)$. Vis at de partielle deriverte av første orden tilfredsstiller ligningen $z_x - z_y = 2y(x+y)$.

b) Vis at punktet $P = (3, 0, -6)$ ligger på flaten F. Finn tangentplanets ligning i P. Den partielt deriverte $\frac{\partial z}{\partial x}(3,0)$ er stigningstallet til en linje som ligger i dette tangentplanet. Bruk den geometriske tolkningen av $\frac{\partial z}{\partial x}$ til å forklare hvilken linje dette er.

c) Flaten har fire kritiske punkter. Finn de kritiske punktene og klassifiser dem (dvs. angi deres type).

OPPGAVE 3

Temperaturen i et punkt (x, y) er gitt ved funksjonen

$$f(x,y) = y \cdot \sin(\pi x^2/4) .$$

Vi befinner oss i punktet $(x, y) = (1, 2)$. I hvilken retning må vi bevege oss for å oppleve størst temperaturvekst? I hvilke retninger får vi ingen temperaturvekst?

OPPGAVE 4

a) Undersøk om rekkene $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ og $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ konvergerer eller divergerer? Konvergerer den siste rekka absolutt eller betinget?

b) Finn konvergensområdet til rekka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n}$. Finn summen av rekka der den konvergerer.

Oppgave 5

a) Finn den binomiske rekka (dvs. finn Maclaurinrekka) til $f(x) = \sqrt{1+x}$.

b) Vis at Taylorpolynomet til $f(x)$ av grad 4 om $x = 0$ er $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}$.
Bruk Taylorpolynomet til $f(x)$ av grad 2 om $x = 0$ til å regne ut $\sqrt{1.2}$ tilnærmet.

c) Beregn integralet $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\, dx$ tilnærmet ved å bruke de 3 første leddene i Maclaurinrekka til $f(x)$. Benytt en av restleddsformlene til å anslå feilen som gjøres ved å bruke denne tilnærmingen for $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\, dx$.

Oppgave 6

Vi betrakter funksjonen f gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{for } 0 < t < 1 \\ 2, & \text{for } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

a) Skisser grafen til summen av Fourier sinus rekka til f i intervallet $\langle -4, 4]$.
Hva blir summen av denne rekka for $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ og $t = 5$?

b) Finn Fourier sinus rekka til f.

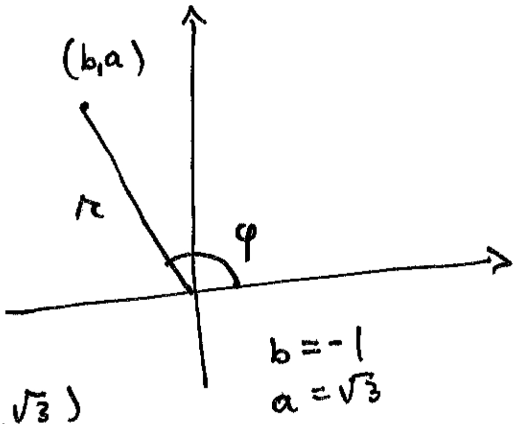
LØSNINGSFORSLAG , Ma 2000 , Eksamen 3.12. 2013 for Bygg og Maskin

Oppg. 1 a)

$a\cos 5t + b\sin 5t = r\sin(5t+\varphi)$

dersom φ og r velges som på fig, dvs.

$r = \sqrt{a^2+b^2}$, $r\sin\varphi = a$
$r\cos\varphi = b$



$\varphi = 120^\circ$ og $r = 2$ når $(b,a) = (-1, \sqrt{3})$

$\Longrightarrow \underline{\underline{\varphi = \frac{2\pi}{3}\ (120^\circ)}}$, $\underline{\underline{r = 2}}$ og $\underline{\underline{\omega = 5}}$

b) $my'' + cy' + ky = 0$ ← fordi bevegelsen er fri

Får

$5y'' + 20y' + 100y = 0$

$y'' + 4y' + 20y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 8$

Kar. ligm $r^2 + 4r + 20 = 0 \iff \underline{r = -2 \pm 4i}$

Kompleks løsning $e^{(-2+4i)t} = e^{-2t}(\cos 4t + i\sin 4t)$

Generell løsn $y = e^{-2t}(c_1\cos 4t + c_2\sin 4t)$

$y(0) = 0$ gir $y(0) = c_1 = 0$, dvs

$y = e^{-2t} \cdot c_2\sin 4t$

$y' = -2e^{-2t} \cdot c_2\sin 4t + e^{-2t} \cdot c_2(\cos 4t) \cdot 4$

$y'(0) = 4c_2 = 8 \iff c_2 = 2$

Løsning : $\underline{\underline{y = 2e^{-2t}\sin 4t}}$

Oppg. 2 a) $z = f(x,y) = x + y - \frac{1}{3}x^3 - x^2y - 2xy^2 - \frac{4}{3}y^3$.

$\Rightarrow z_x = 1 - x^2 - 2xy - 2y^2$, $z_{xx} = -2x - 2y$

$z_y = 1 - x^2 - 4xy - 4y^2$, $z_{yy} = -4x - 8y$

$z_{xy} = z_{yx} = -2x - 4y$

Får $z_x - z_y = 2xy + 2y^2 = 2y(x+y)$

b) $f(3,0) = 3 + 0 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 = -6 \Rightarrow (3,0,-6)$ ligger på F

Tangentplanets ligm.: $z - (-6) = (1-3^2)(x-3) + (1-3^2)(y-0)$

$\Leftrightarrow z + 6 = -8x + 24 - 8y \Leftrightarrow z = -8x - 8y + 18$

Når vi finner $\frac{\partial z}{\partial x}(3,0)$, så holdes y konstant (y=0) når vi deriverer. Den deriverte $\frac{\partial z}{\partial x}(3,0)$ er derfor lik stigningstallet til tangenten i (3,0,-6) til kurven C på F som ligger i vertikalplanet $y = 0$. (dvs. som skjæres ut av)

c) Kritiske punkter: $z_x = 1 - x^2 - 2xy - 2y^2 = 0$ (1)

$z_y = 1 - x^2 - 4xy - 4y^2 = 0$ (2)

Trekker ligm. (2) ifra (1) og får

$z_x - z_y = 2y(x+y) = 0$, dvs. $y = 0$ eller $y = -x$

$y = 0$ gir $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$y = -x$ gir $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

De kritiske punktene: $(1,0), (-1,0), (1,-1), (-1,1)$

$\Delta = z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2 = -2(x+y) \cdot (-4)(x+2y) - 2^2(x+2y)^2$

$\Delta(1,0) = (-2)(-4) - 4 = 4 > 0 \Rightarrow (1,0)$ er maxpunkt fordi $z_{xx}(1,0) < 0$

$\Delta(-1,0) = 4 > 0 \Rightarrow (-1,0)$ er min.punkt fordi $z_{xx}(-1,0) = 2 > 0$

$\Delta(1,-1) = -4(-1)^2 < 0 \Rightarrow (1,-1)$ er sadelpunkt

$\Delta(-1,1) = -4 < 0 \Rightarrow (-1,1)$ er sadelpunkt

Oppg. 3 $f(x,y) = y\sin\left(\frac{\pi x^2}{4}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos\left(\frac{\pi x^2}{4}\right)\cdot\frac{\pi\cdot 2x}{4} = \frac{\pi y}{2}\cos\left(\frac{\pi x^2}{4}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\left(\frac{\pi x^2}{4}\right)$$

Gradienten er $\nabla f = \left[\frac{\pi y x}{2}\cos\left(\frac{\pi x^2}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi x^2}{4}\right)\right] \Rightarrow$

$$\nabla f(1,2) = \left[\frac{\pi\cdot 2}{2}\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right] = \left[\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}[\pi, 1]}$$

Får størst temperaturvekst i gradientens retning, dvs i retningen $\underline{\underline{[\pi,1]}}$. Vi får ingen temperatur-vekst i retningene $[a,b]$ som står vinkelrett på $[\pi,1]$, dvs der prikkproduktet $[a,b]\cdot[\pi,1] = 0$. Får

$$\underline{\underline{[a,b] = [-1,\pi]}} \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{[a,b] = [1,-\pi]}}$$

Oppg. 4 a) $\sum \frac{n}{n^2+1}$. La $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ og $b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Har $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$. Da rekka $\sum\frac{1}{n}$ divergerer, så vil også $\underline{\underline{\sum\frac{n}{n^2+1} \text{ divergere}}}$

$\sum(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$. Er alternerende. Bruker Leibnitz:

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ og $a_{n+1} < a_n$ for alle $n \Rightarrow \underline{\underline{\sum(-1)^n a_n \text{ konv.}}}$

Rekka $\sum(-1)^n a_n$ konvergerer betinget fordi "tall-verdirekka" $\sum a_n$, $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ divergerer

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n}$. La $a_n = 2nx^{2n}$. Forholdskriteriet:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2(n+1)x^{2n+2}}{2nx^{2n}} = \frac{n+1}{n}\cdot x^2 \longrightarrow x^2 \text{ når } n\to\infty$$

$\Longrightarrow$

Rekka konv. når $x^2<1 \iff \underline{-1<x<1}$ og den divergerer når $x^2>1$.

Når $x=\pm 1$, så vil $\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n$ som divergerer fordi $2n \to \infty$ når $n \to \infty$. Konv.området er:

$$\underline{\underline{-1<x<1}}$$

Vet at $1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$, $|x|<1$

fordi denne rekka er geometrisk. Derivasjon gir

$$2x+4x^3+\cdots+2nx^{2n-1}+\cdots = \frac{-(-2x)}{(1-x^2)^2}.$$

Ganger med x, Får

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n\,x^{2n} = 2x^2+4x^4+\cdots+2nx^{2n}+\cdots = \underline{\underline{\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}}}, \quad |x|<1$$

<u>Oppg. 5</u> a) $f(x)=(1+x)^{1/2} \Rightarrow (1+x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}x^n$

$$\Rightarrow (1+x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{1\cdot 2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4+\cdots$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots}}, \quad |x|<1$$

b) Taylorpolynomene $P_n(x)$ om $x=0$ er gitt ved de første leddene i Mac. rekka over $\Longrightarrow$

Taylorpoly. av grad 4: $P_4(x) = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4$

$$\Rightarrow P_4(x) = \underline{\underline{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}}}$$

Taylorpoly. av grad 2: $P_2(x) = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \approx \sqrt{1+x}$

$$\Rightarrow \sqrt{1.2} = \sqrt{1+0.2} \approx 1+\frac{0.2}{2}-\frac{0.04}{8} = 1+0.1-0.005 = \underline{\underline{1.095}}$$

c) Fra a) og b):

$$(1+x^3)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}(x^3)^2 + \frac{1}{16}(x^3)^3 - \dots$$
$$= 1+\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{16}x^9 - \dots$$

Brūker de 3 første leddene og får

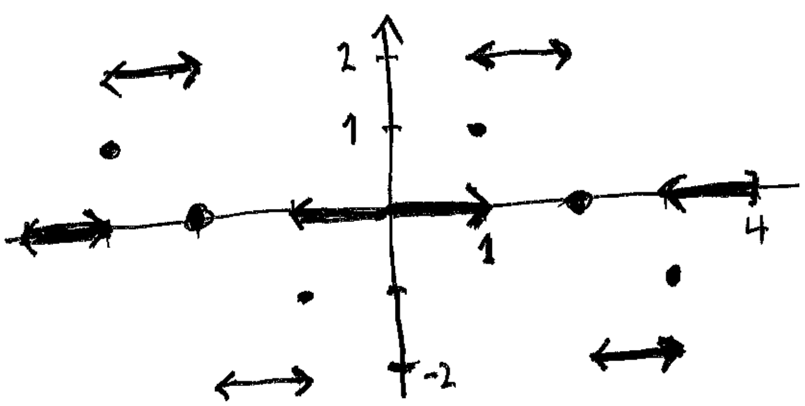
$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \approx \left[x + \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} - \frac{1}{8}\cdot\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = 1+\frac{1}{8} - \frac{1}{56} = \underline{\underline{\frac{31}{28}}}$$

Vi ser at rekka for $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$ er alternerende (ved å skrive ut flere ledd). Feilen i tilnærmingen er mindre enn 1. utelatte ledd som er

$$\int_0^1 \frac{1}{16}x^9\,dx = \frac{1}{16}\cdot\frac{x^{10}}{10}\Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{160}}}$$

<u>Oppg. 6</u> $\quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{når } 0<t<1 \\ 2 & \text{når } 1\le t<2 \end{cases}$

a) Fourier sinus rekka er Fourier rekka til den odde periodiske utvidelsen (dvs graf sym. om origo) og perioden er $\boxed{T = 2L = \underline{\underline{4}}}$. Brūker også at $\underbrace{\text{sūmmen}}_{S(t)}$ = middelverdien i diskont. pūnktene



$S(0) = \underline{\underline{0}}$, $S(\tfrac{1}{2}) = \underline{\underline{0}}$

$S(1) = \underline{\underline{1}}$ ser vi av grafen. Videre

$S(5) = S(1) = \underline{\underline{1}}$

↑ perioden = 4

b) $\underline{\underline{a_0 = a_n = 0}}$ og $b_n = \frac{4}{4}\int_0^2 f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{4}nt\right)dt = \int_0^2 f(t)\sin\left(\frac{\pi n}{2}t\right)dt$

$$\Rightarrow b_n = \int_1^2 2\sin\left(\frac{\pi n}{2}t\right)dt = 2\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}t\right)\right)\Big|_1^2 = \frac{4}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \cos(\pi n)\right)$$

Fourier sinusrekka $\underline{\underline{S(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - (-1)^n\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}t\right)}}$ der $\cos\pi n = (-1)^n$