Eksamen Ma 2000 for bygg og maskin . 20.02.2014

OPPGAVE 1

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen $9y'' + 36y = 4$.

b) Vis at $y = t\sin 2t$ tilfredsstiller differensiallikningen $y'' + 4y = 4\cos 2t$, og bruk dette til å løse initialverdiproblemet (hvor $y = y(t)$):

$$y'' + 4y = 4\cos 2t\ ,\quad y(0) = 0\ ,\quad y'(0) = 4\ .$$

Hvis differensiallikningen modellerer bevegelsen i et svingende system, hva skjer med svingningene når tiden går? Hva kalles dette fenomenet?

OPPGAVE 2

Gitt funksjonen $z = f(x,y) = 4x^2 - 8xy + xy^2$. Grafen til f er en flate som vi kaller F.

a) Regn ut de partielt deriverte av første og andre orden til $z = f(x,y)$.
Finn tangentplanets ligning i punktet $(2,1,2)$ på flaten F.

b) Vi befinner oss i punktet $Q = (2,1,2)$. I hvilken retning må vi gå hvis vi har tenkt å bevege oss langs den brattest mulige kurven på F? Finn også stigningstallet til tangenten i Q til kurven gjennom Q på F i retningen $[1,2]$.

c) Bestem de kritiske punktene til funksjonen $z = f(x,y)$, og klassifiser dem (dvs. angi deres type).

d) En kurve D på F er gitt ved at vi lar (x,y) variere langs kurven $4x - y^2 = 0$. Finn minimum av $z = f(x,y)$, med tilhørende x-verdi, langs D.

OPPGAVE 3

a) Vis at rekka $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!}$ konvergerer. Er rekka absolutt konvergent eller betinget konvergent?

b) Finn konvergensområdet til rekka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{n^2+1}$.

OPPGAVE 4

a) Finn Maclaurinrekka til $x^4 e^x$ og vis at Maclaurinrekka til $\displaystyle\int_0^x t^4 e^t\,dt$ er:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+5}}{n!\cdot(n+5)}\ .$$

b) Finn potensrekka for $\displaystyle\int_{-x}^{0} t^4 e^t\,dt$ og ei tallrekke som har $\displaystyle\int_{-1}^{0} t^4 e^t\,dt$ som sum. Hvor mange ledd må du ta med i den siste rekka for at feilen skal bli mindre enn 10^{-3}?

c) Bruk de første leddene i Maclaurinrekka til e^x og et passende konvergenskriterium for å avgjøre om rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n^2} - 1}{n}$ konvergerer.

OPPGAVE 5

La $T = T(x, y, z)$ være temperaturen i et punkt (x, y, z) der x, y og z måles i m (meter) og la $P = (100, 100, 400)$ og $Q = (102, 104, 404)$. I denne oppgaven skal vi regne ut temperaturen $T(Q)$ tilnærmet ved å bruke at $T(P) = 22\ {}^\circ C$ og at gradienten av T er $\nabla T(P) = [\,0.2, 0.1, 0.3\,]$ i retningen $\vec{v} = [\,2, 4, 4\,]$ (de partielt deriverte av T måles i $^\circ C/m$). Finn først den retningsderiverte til T i P i retningen $\vec{v}$.

Finn en tilnærmet verdi for temperaturen i punktet Q.

OPPGAVE 6

La $f(x)$ være summen av Fourierrekka

$$\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}\,.$$

Tegn grafen til $f(x)$ for $-3\pi \leq x \leq 3\pi$ dersom du får oppgitt at $f(x) = \pi - x$ for $0 < x < \pi$. Finn summen av rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}\,.$$

LØSNINGSFORSLAG

Oppg. 1 a) Kar. ligm. : $9r^2+36=0 \iff r=\pm 2i$. Løsn. e^{2it}

$$y_h = c_1\cos 2t + c_2 \sin 2t$$

Søker part. løsn. av formen $y_p = a \Rightarrow y_p' = y_p'' = 0$. Innsatt

$36a = 4 \iff a = \frac{1}{9}$.

Gen. løsn. $y = y_h + y_p = \underline{\underline{c_1\cos 2t + c_2\sin 2t + \frac{1}{9}}}$

b) $y = t\sin 2t$, $y' = \sin 2t + t\cdot(\cos 2t)\cdot 2$, $y'' = 2\cos 2t + 2\cos 2t - 4t\sin 2t$

Innsatt i venstresiden :

$$y'' + 4y = 4\cos 2t - 4t\sin 2t + 4t\sin 2t = 4\cos 2t$$, dvs lik høyresiden

$y = t\sin t$ er altså en partikulærløsn y_p. Gen. løsn. er

$$y = y_h + y_p = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t + t\sin 2t$$

$y(0) = c_1 = 0 \Rightarrow y = c_2\sin 2t + t\sin 2t \Rightarrow$

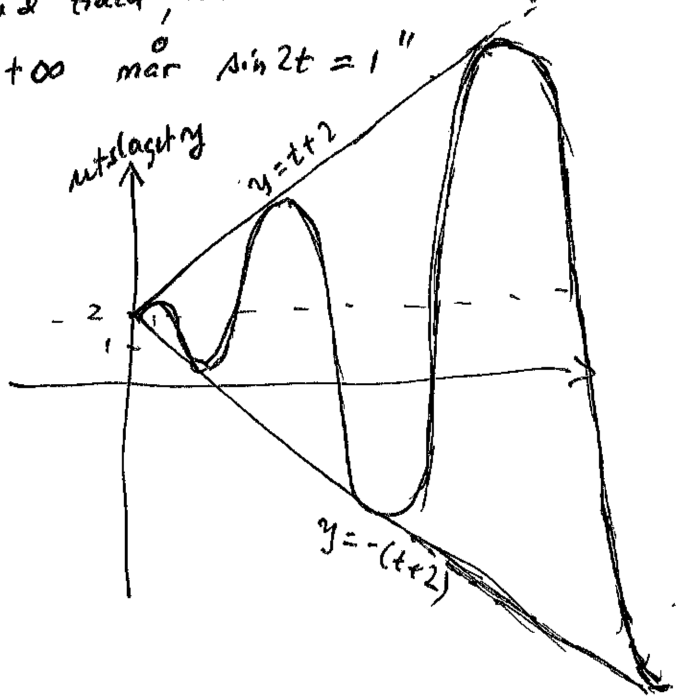
$y' = c_2(\cos 2t)\cdot 2 + \sin 2t + t(\cos 2t)\cdot 2 \Rightarrow y'(0) = 2c_2 = 4$

dvs $c_2 = 2$

Løsn. av initialverdiproblemet er:

$$y = 2\sin 2t + t\sin 2t = \underline{\underline{(t+2)\sin 2t}}$$

Ser at når tiden går, så vil utslagene vokse og vokse ($t+2$ "leddet" vokser med tiden, mens $\sin 2t$ svinger mellom $+1$ og -1), dvs "$y \to +\infty$ når $\sin 2t = 1$"



Dette fenomenet kalles

RESONANS

Oppg. 2 a) $z = 4x^2 - 8xy + xy^2$

$z_x = 8x - 8y + y^2$, $z_y = -8x + 2xy$

$z_{xx} = 8$, $z_{xy} = z_{yx} = -8 + 2y$, $z_{yy} = 2x$

Når $(x,y) = (2,1)$, så er $[z_x, z_y] = [9, -12]$.

Tangentplanets ligm. $z - 2 = 9(x-2) - 12(y-1) \iff$

$z = 2 + 9x - 18 - 12y + 12 \iff z = 9x - 12 - 4$

b) Mest mulig stigning i gradientens retning:

$[9,-12] = 3[3,-4]$, dvs brattest i retn. $[3,-4]$

Stigm.tallet til tangenten er lik den retningsderiverte, dvs lik

$$[9,-12]\cdot\frac{[1,2]}{\sqrt{1+4}} = \frac{-15}{\sqrt{5}} = \frac{-3\cdot 5}{\sqrt{5}} = -3\sqrt{5}$$

c) Kritiske punkter: $z_x = z_y = 0$. Får

$z_y = 2x(y-4) = 0 \iff x = 0$ eller $y = 4$

$x = 0$ gir $z_x = -8y + y^2 = y(y-8) = 0 \iff y = 0, y = 8$

$y = 4$ gir $z_x = 8x - 8\cdot 4 + 4^2 = 0 \iff 8x = 16 \iff x = 2$

3 kritiske punkter: $(x,y) = (0,0), (0,8), (2,4)$

$\Delta = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 8\cdot 2x - (2(y-4))^2 = 16x - 4(y-4)^2$

$\Delta(0,0) = -4(-4)^2 = -64 < 0$, dvs $(0,0)$ er sadelpunkt

$\Delta(0,8) = -4\cdot(8-4)^2 = -64 < 0$, dvs $(0,8)$ —"—

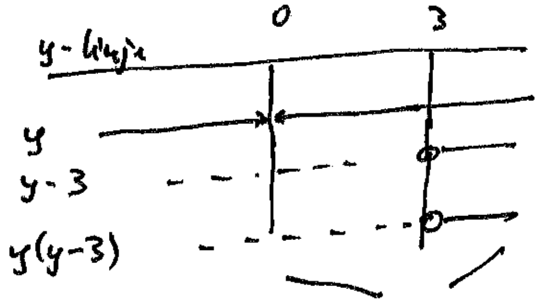
$\Delta(2,4) = 16\cdot 2 - 0 = 32 > 0$, $z_{xx} = 8 > 0$, dvs $(2,4)$ er min.pkt

d) Kurven D: $4x = y^2$. Setter dette inn i $z = f(x,y)$. Får

$$4x\cdot x - 2y\cdot 4x + x\cdot y^2 = y^2\cdot\frac{y^2}{4} - 2y\cdot y^2 + \frac{y^2}{4}\cdot y^2 = \frac{y^4}{2} - 2y^3$$

La $g(y) = \frac{1}{2}y^4 - 2y^3$. Finner max./min. av g. Deriverer:

$$g'(y) = \frac{1}{2}\cdot 4y^3 - 2\cdot 3y^2 = 2y^3 - 6y^2 = 2y^2(y-3)$$



$y=3$ gir min av g og dermed et min. punkt på D

$y=3$ gir $x = \frac{y^2}{4} = \frac{9}{4}$

Min. punktet er $(x,y) = \underline{\underline{\left(\frac{9}{4}, 3\right)}}$

$z_{min} = \underline{\underline{-\frac{27}{2}}}$

Oppg. 3 a) $\sum (-1)^n \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!} = \sum a_n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{2^n\cdot n!} = \frac{2\cdot(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{1}{2n+3} \to 0 \text{ når } n\to\infty$$

Rekka konvergerer etter forholdskriteriet.

Da $\sum |a_n|$ konvergerer etter samme argumentasjon, så konverger $\sum a_n$ absolutt.

b) $a_n = \frac{n x^n}{n^2+1}$. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{n\cdot x^n}\right| =$

$$|x|\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} \longrightarrow |x| \quad \text{når } n\to\infty$$

Rekka konvergerer derfor for $|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$ og den divergerer når $|x|>1$. Må sjekke endepunkter

$x=1$ Rekka er $\sum \underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{a_n}$. La $b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

Da $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$ og $\sum b_n$ divergerer (p-rekke med $p=1$)

så vil $\sum a_n$ divergere.

$x=-1$. Rekka blir $\sum (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$. Hvis $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, så vil $a_n \to 0$ og $a_{n+1} > a_n$

Rekka konv. etter Leibnitz. Konv.området blir

$$\underline{\underline{-1 \le x < 1}}$$

Oppg. 4 a) Vet at $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow x^4 e^x = x^4 + \frac{x^5}{1!} + \cdots + \frac{x^{n+4}}{n!} + \cdots = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+4}}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}}}$$

~~Da $e^{x+1} = e \cdot e^x$, så må~~ $\cancel{e^{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e \cdot x^n}{n!}, \; x \in \mathbb{R}}$

Vi integrerer rekka $t^4 e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+4}}{n!}$ ledd for ledd. Får

$$\int_0^x t^4 e^t \, dt = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+5}}{n! \cdot (n+5)} \right]_0^x = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+5}}{n!(n+5)}, \quad x \in \mathbb{R}}}$$

alle rekkene konv. for alle $x \in \mathbb{R}$ fordi rekka for e^x konv. for $x \in \mathbb{R}$

b) $$\int_{-x}^{0} t^4 e^t \, dt = \left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^6}{1! \cdot 6} + \frac{t^7}{2! \cdot 7} + \cdots + \frac{t^{n+5}}{n!(n+5)} + \cdots \right]_{-x}^{0} =$$

$$- \left(\frac{(-x)^5}{5} + \frac{(-x)^6}{1! \cdot 6} + \frac{(-x)^7}{2! \cdot 7} + \cdots + \frac{(-x)^{n+5}}{n!(n+5)} + \cdots \right) =$$

$$\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{1! \cdot 6} + \frac{x^7}{2! \cdot 7} - \frac{x^8}{3! \cdot 8} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{n+5}}{n!(n+5)} + \cdots = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+5}}{n!(n+5)}}}, \; x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} x^4 e^x \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!(n+5)} = \frac{1}{5} - \frac{1}{1! \cdot 6} + \frac{1}{2! \cdot 7} - \frac{1}{3! \cdot 8} + \cdots$$

Dette er ei alternerende rekke og ~~og~~ tallverdien av feilen er $\leq$ 1. utelatte ledd.

Da $\frac{1}{5! \cdot 10} = \frac{1}{1200} < 10^{-3}$, så vil feilen i tilnærmingen

$$\int_{-1}^{0} x^4 e^x \, dx \approx \frac{1}{5} - \frac{1}{1! \cdot 6} + \frac{1}{2! \cdot 7} - \frac{1}{3! \cdot 8} + \frac{1}{4! \cdot 9}$$ være $\leq 10^{-3}$

dvs trenger $\underline{\underline{\text{5 ledd i rekka}}}$

c) Vet at $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots \Longrightarrow e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \cdots$

$$\Rightarrow e^{1/n^2} - 1 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + \cdots \Longrightarrow \underline{\frac{e^{1/n^2} - 1}{n} = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{2n^5} + \cdots}$$

Dette viser at vi kan sammenligne $\sum a_n$ der $a_n = \frac{e^{1/n^2}-1}{n}$ med $\sum b_n$ der $b_n = \frac{1}{n^3}$ fordi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^3 \frac{e^{1/n^2}-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n^2}+\cdots\right) = 1$$

Da $\sum b_n$ er konvergent (p-rekke med $p=3$), så vil også $\sum a_n$ konvergere.

Oppg. 5 Den retningsderiverte er

$$\nabla T(P)\cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = [0.2, 0.1, 0.3]\cdot \frac{[2,4,4]}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}} = \frac{2\cdot 0.2+4\cdot 0.1+4\cdot 0.3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\,(°C/m)}}$$

Da $Q = [102, 104, 404]$, så vil

$\vec{PQ} = [102, 104, 404] - [100, 100, 400] = [2, 4, 4] \Longrightarrow$

avstanden fra P til Q er $|\vec{PQ}| = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = \underline{6\ (m)}$

I retningen $\vec{PQ}$ eller $\vec{v}$ ($\vec{PQ} = \vec{v}$) så er temperatur-forandringen $\frac{1}{3}$ °C/m $\Rightarrow$ Temp.økning over 6 m er $\approx \frac{1}{3}\cdot 6 = 2$ (°C)

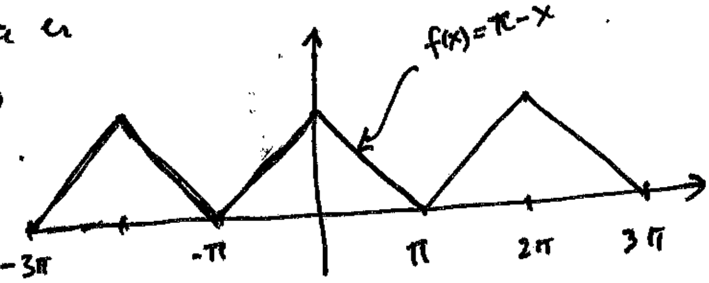
Derfor er $T(Q) \approx T(P) + 2 = 22 + 2 = \underline{\underline{24\ (°C)}}$

(Formelen for lineær approksimasjon:

$$T(Q) \approx T(P) + \nabla T(P)\cdot \vec{PQ} = 22 + 2 = 24\ (°C)$$

kan også benyttes for å vise dette)

Oppg. 6 Fourierrekka som er gitt er en Fourier Cosinus rekke med periode 2π. Da er grafen sym. om y-aksen og perioden er 2π og f må se ut som i fig til høyre



Setter $x=0$ inn i Fourierrekka

Får $f(0) = \pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \Longrightarrow \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\cdot \sum \frac{1}{(2k-1)^2}$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{8}}}$$