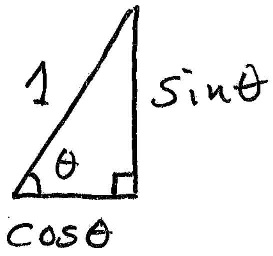
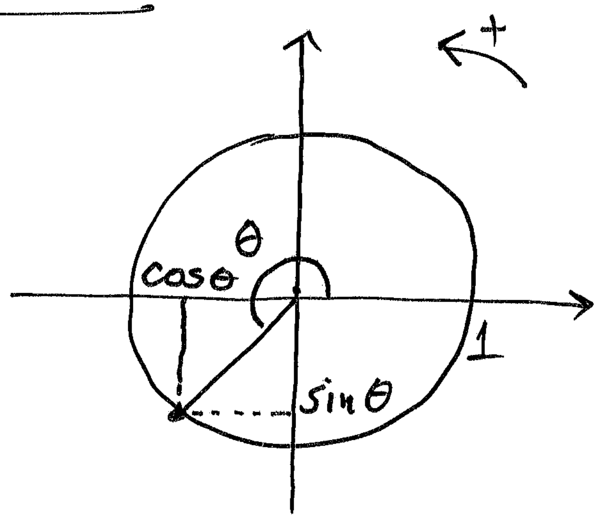
11. jan 2016

Komplekse tall

Sinus og kosinus

(1)





$-1 \leq \cos\theta \leq 1$

$-1 \leq \sin\theta \leq 1$

$\cos\theta = 0$ når

$\theta = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n$

n heltall.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

definert når $\cos\theta \neq 0$.

$\cos\theta$ og $\sin\theta$ er periodiske funksjoner med periode 2π:

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$$

for alle θ.

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$$
$$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$$

alle θ (geometrisk argument: reflekterer om origo)

$$\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta) \quad \text{for alle } \theta$$

tan er periodisk med periode π.

Pytagoras: $(|\cos\theta|)^2 + (|\sin\theta|)^2 = 1^2$

lengden på katetene

lengde hypotenus

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

($\cos^2\theta$ betyr $(\cos\theta)^2$, $\cos\theta^2$ betyr $\cos(\theta^2)$)

②

$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ for alle θ (hvorfor?)

polare koordinater

r, θ

Kartesiske koordinater

(x, y)

$r, \theta \longmapsto x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$\longleftarrow\!\!\!\mid\ (x, y)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \qquad y>0, x=0$

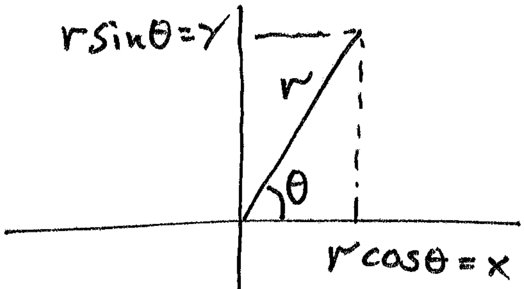
$\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot n \qquad y<0, x=0$

$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi \cdot n, \quad x>0$

$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi + 2\pi \cdot n \qquad x<0$

n heltall

(antall hele omløp i positiv retning)



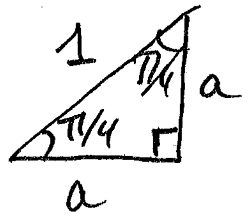
$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

$\arctan(v)$

$= \tan^{-1}(v)$

(3) $2, \frac{\pi}{4}$ poolare koordinater.

i kartesiske koordinater $\left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$



Pytagoras: $a^2 + a^2 = 1$

$2a^2 = 1$

$a^2 = \frac{1}{2}$

$a > 0$ så $a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Kartesisk form: $\left(2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \underline{\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)}$

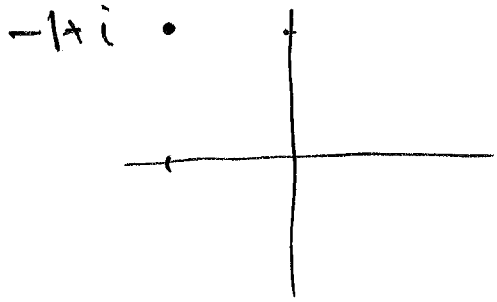
Beskriv $1+\sqrt{3}i$ på polar form.

$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = \underline{2}$

$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) + (2\pi\cdot n)$

$= \underline{\frac{\pi}{3} + 2\pi\cdot n}$

Beskriv $-1+i$ på polar form.



(4)

$$r = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \underline{\sqrt{2}}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\theta = \arctan(-1) + \pi + 2\pi \cdot n$$

$$= \frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot n$$

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Vi viser at multiplikasjon av to komplekse tall er gitt ved å gange sammen lengden og legge sammen vinklen.

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 \cdot r_2\Big(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)\Big)$$

$$= r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)$$

Vi har benyttet addisjonsformlene for cos og sin

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin\theta_2$$

$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\cos(\theta_1).$$

De Moivres formel

$$\underbrace{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}_{\substack{\text{lengde } 1 \\ \text{vinkel } n\cdot\theta}} = (\underbrace{\cos\theta + i\sin\theta}_{\substack{\text{lengde } 1 \\ \text{vinkel } \theta}})^n .$$

5

$\underline{n=2}$ $\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \cos^2\theta + i^2\sin^2\theta + i(2\cdot\sin\theta\cos\theta)$$

(Realdel og imaginær delene må være like :)

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cdot\cos\theta .$$

formler for dobling av vinkelen.

$\underline{n=3}$ $\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) =$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3 + 3\cos^2\theta(i\sin\theta)$$

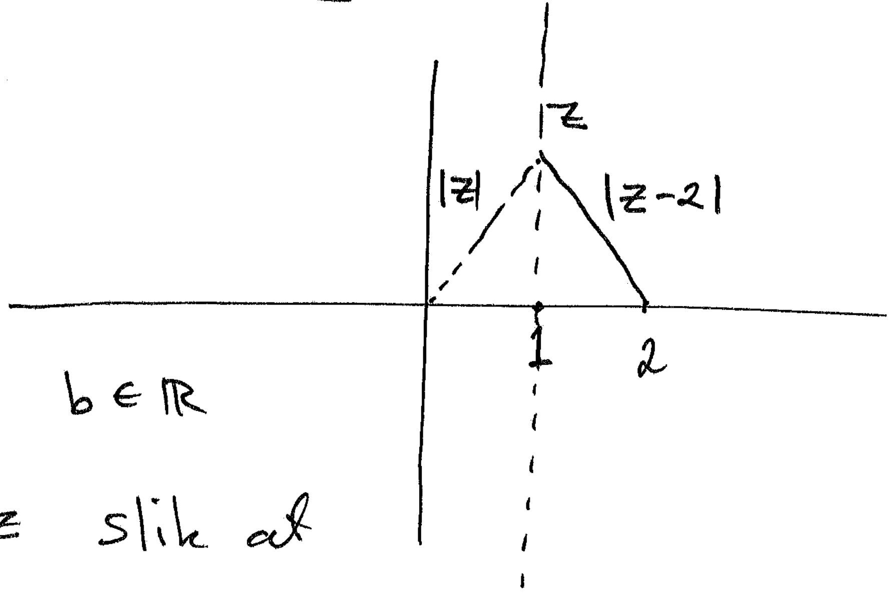
[Vi har her benyttet $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.]

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

$$\sin(3\theta) = -\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta .$$

6 Noen likninger

$$|z| = |z-2|$$



Løsningen består av alle

$z = 1 + bi$ $\qquad b \in \mathbb{R}$

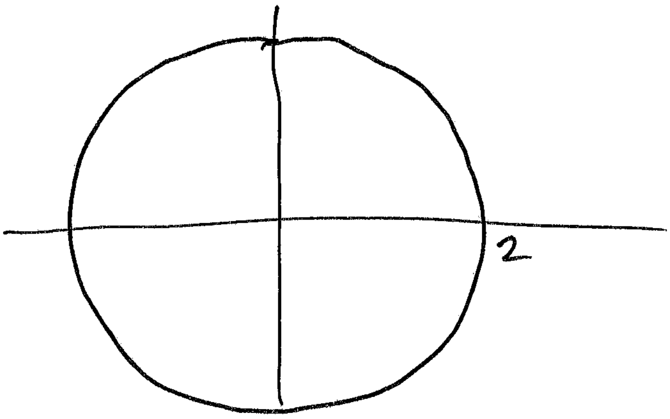
Det er alle z slik at

$\mathrm{Re}(z) = 1$.

$$\underbrace{z \cdot \bar{z}}_{|z|^2} - 4 = 0$$

$$|z|^2 - 4 = 0 \quad , \quad |z|^2 = 4$$

$$|z| = \sqrt{4} = 2$$



Løsningsmengden er en sirkel med radius 2 og senter i origo.

$$z(\bar{z} - 2) = 3$$

$$z \cdot \bar{z} - 2z = 3 \qquad |z|^2 - 2z = 3.$$

$$-2z = 3 - |z|^2 \quad \text{reell}$$

z reell: $|z|^2 = z^2$ så

$$z^2 - 2z - 3 = 0. \qquad (z-1)^2 - 1 - 3 = 0 \quad (-\log 3)$$

$$(z-1)^2 = 4, \qquad z - 1 = \pm 2, \qquad \underline{z = -1, 3}$$

7

Eksponentfunksjonen

Potens a^b — grunntall: a, eksponent: b

$$2^3 = 2\cdot 2\cdot 2$$

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}, \quad (a^b)^c = a^{b\cdot c}$$

$$2^{1/3} = \sqrt[3]{2} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{1/n} \quad a \geq 0$$

$$a^{2/3} = (a^{1/3})^2 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2.$$

$$a^{n/m} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n.$$

Utvider til a^r $\quad$ r reelt tall

(ved å kreve at a^r skal være kontinuerlig, kontinuerlig)

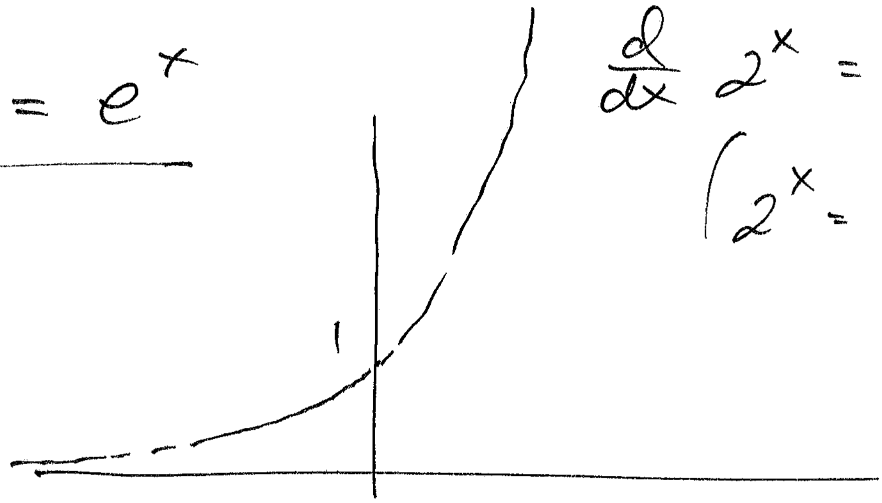
$e = 2.718\ldots$ $\quad$ Euler tallet

$e^x = \exp(x)$ $\quad$ naturlig eksponential-funksjon.

$$\underline{\frac{d}{dx} e^x = e^x}$$

$$\frac{d}{dx} 2^x = 2^x \cdot \ln(2)$$

$$\left(2^x = e^{\ln 2 \cdot x} \quad \ldots\right)$$



8 exp tar sum til produkt

$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot \exp(y)$$

$$\exp(0) = 1.$$

Funksjonen ix gitt ved

$\cos x + i\sin x$ 1) tar sum til produkt.

2) sender 0 til $\cos(0) + i\sin(0) = 1$

3) Den deriverte er:

$$(\cos x + i\sin x)' = -\sin x + i\cos x$$

$$= i(\cos x + i\sin x)$$

(Kjernevegelen: $(e^{ax})' = a\,e^{ax}$)

Dette motiverer Eulers formel

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$$

$$e^{2+3i} = e^2\cdot e^{3i} = e^2(\cos(3) + i\sin(3))$$

Vi kan skrive et komplekst tall på polar form som $r\,e^{i\theta}$

Dette er lik $r\cos\theta + i r\sin\theta$. (kartesisk form)