OBLIG 1

M 1000

Frist (16. sep 2016)

Løsningsforslag

(1)

1a) $z^2 - 2iz - i = 0$

$(z-i)^2 - (-i)^2 - i = 0$

$(z-i)^2 = -1+i$

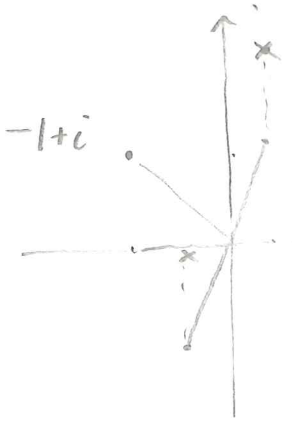
$z = i \pm \sqrt{-1+i}$

Fullføring av kvadratet (alternativt abc-formelen)

Vi finner kvadratrøttene til $-1+i$

$-1+i = \sqrt{2}\, e^{3\pi i/4}$

$\left(|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} \right)$



Kvadratrøttene er

$\sqrt{\sqrt{2}}\; e^{(3\pi i/4 + 2\pi i m)/2}$ $\quad m = 0,1$

$\sqrt[4]{2}\; e^{\frac{3\pi i}{8} + \pi i m}$

$\left(\sqrt{\sqrt{2}} = (2^{1/2})^{1/2} = 2^{1/2 \cdot 2} = \underline{2^{1/4}} \right)$

Løsningene til likningen er

$z = i + \sqrt[4]{2}\, e^{3\pi i/8}$ og $z = i - \sqrt[4]{2}\, e^{3\pi i/8}$

Vi finner numeriske estimat for tallene på kartesisk form $\left(e^{3\pi i/8} = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \text{ etc...} \right)$

$z \doteq 0.44508 + 2{,}09868i$ og $z \doteq -0{,}44508 - 0{,}09868i$

Dette stemmer godt med figuren ovenfor

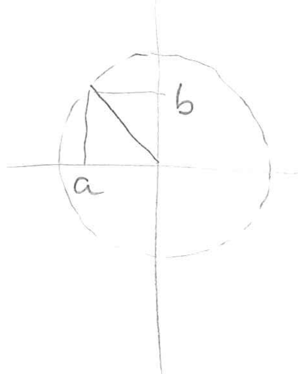
2)

Vi finner nå en beskrivelse av tallene på polar koordinat

($re^{iv} = a+bi$ gir $r = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

Hvis $a \neq 0$ og $\tan v = \frac{b}{a}$

v (opp til et omløp) er gitt ved



$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ når $a > 0$

$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$ når $a < 0$

Hvis $a = 0$ $b > 0$ $v = \frac{\pi}{2}$ (opp til et hele omløp)

– $b < 0$ $v = -\frac{\pi}{2}$

Hvis $a = b = 0$ da er $r = 0$ og det er ikke (behov) for noen vinkel.)

Vi regner ut og får

$$z = 2.1474\, e^{1.3572 i}$$

$$z = 0.46566\, e^{3.3551 \cdot i}$$

Svaret virker rimelig i forhold til skissen på side 1 (vinklene litt under $90°$ (1,57 rad) og litt over $180°$ (3,14 rad))

Her er matlab benyttet (abs( ) og angle( ))

1 b) $z + i = iz - \sqrt{3}$

Dette er en lineær likning i z.

Vi løser for z:

$$z - iz = -i - \sqrt{3}$$

$$z(1-i) = (-\sqrt{3} - i)$$

$$z = \frac{-\sqrt{3} - i}{1 - i}$$

Vi skriver nå z på kartesisk og polar form.

$$z = (-\sqrt{3} - i) \cdot \frac{1+i}{1^2+1^2} \qquad \left(z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right)$$

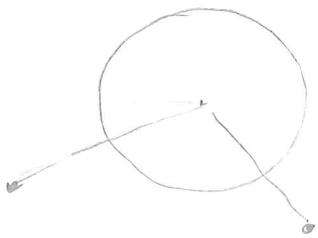
$$= \frac{-1}{2}(\sqrt{3} + i)(1+i) = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i^2 + i(\sqrt{3}+1)\right)$$

$$z = \frac{-\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2} i$$

For å finne z på polar form, kan vi ta utgangspunkt i z på kartesisk form. I dette tilfellet ser det enklere ut å først skrive teller og nevner på polar form først og så ta kvotienten.

Vi vet: $-\sqrt{3} - i = 2e^{\frac{7\pi}{6}i}$

$$1 - i = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

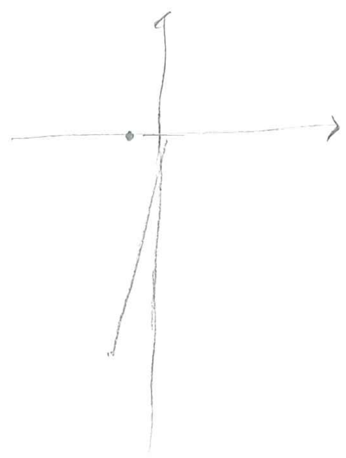


Dette gir $z = \frac{2e^{7\pi i/6}}{\sqrt{2}\, e^{-(\pi/4)i}} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{\left(\frac{7\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)i}$

(4)

$$\underline{z = \sqrt{2}\, e^{\frac{17\pi}{12} i}}$$

(Svaret virker rimelig $\frac{17\pi}{12}$ er litt mindre enn $\frac{18\pi}{12} = \frac{3\pi}{2}$



1 c) $z^2 (z^3 + i) = 0$

$\Leftrightarrow \quad z^2 = 0$ eller $z^3 + i = 0$

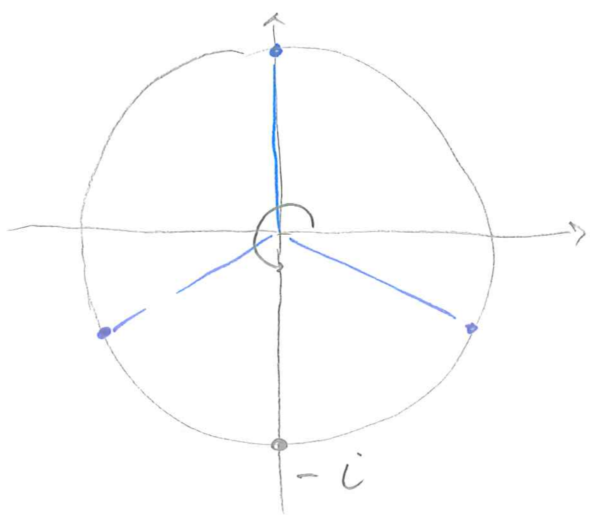
$z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$

$z^3 + i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^3 = -i = e^{3\pi i/2 + 2\pi m i}$

Vi finner tredjerøttene:

$z = \left(e^{3\pi i/2 + 2\pi m i}\right)^{1/3}$

$= e^{\pi i/2 + \frac{2\pi}{3} m i}$



(5)

Vi oppsummerer. Løsningene til $z^2(z^3+i)=0$ er:

(Polar form) $z = 0,\ e^{\pi i/2},\ e^{7\pi i/6},\ e^{11\pi i/6}$.

(kartesisk form) $z = 0,\ i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - i,\ \frac{\sqrt{3}}{2} - i$

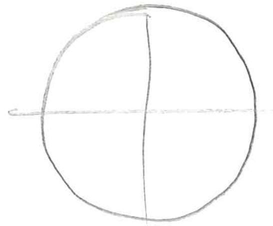
d) $(|z|^2 - 1)(|z+i| - 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ $|z|^2 = 1$ eller $|z+i| = 1$.

$|z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ (siden $|z| = -1$ har ingen løsning)

Dette er alle punkt (tall) med avstand 1 til origo.

Det er enhetssirkelen

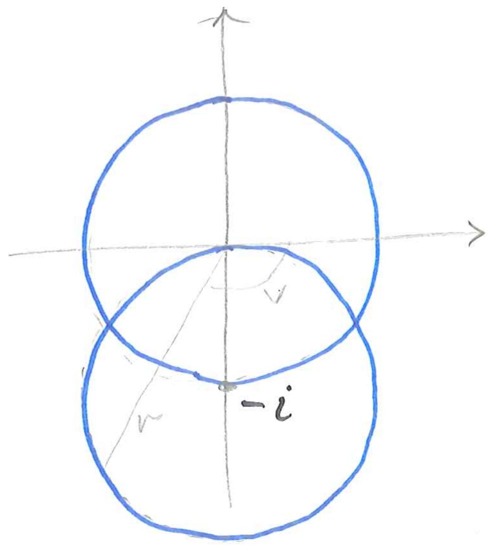


Likeledes er løsningene til $|z+i| = 1$ en sirkel med radius 1 og senter i $z = -i$.

(La $w = z+i$, da er likningen $|w| = 1$. siden $z = w - i$ får vi løsningene ved å ta enhetssirkelen og trekke fra $-i$.)

$\longrightarrow$

⑥ Her er løsningsmengden



$$\left(\begin{aligned} r^2 &= (\sin v - 1)^2 + (\cos v)^2 \\ &= \sin^2 v + \cos^2 v + 1 \\ &\quad - 2\sin v \\ &= 2(1 - \sin v) \end{aligned} \right)$$

Her er en beskrivelse av løsningsmengden på

polar form: $z = e^{iv}$ $\quad v \in [0, 2\pi\rangle$ og

$z = \sqrt{2}\sqrt{1 - \sin v}\; e^{iv}$ $\quad v \in \langle -\pi, 0]$.

Kartesisk form $\quad z = \cos(v) + \sin(v)\, i$

$z = \cos(v) + (\sin(v) - 1)\, i$

$v \in [0, 2\pi\rangle$

(Endelig ferdig med oppgave 1 !)

7

2a) $f(x) = -x^2 + 3x$ $[0,3]$

parabel

$f'(x) = -2x + 3$

så f er stigende fra 0 til $\frac{3}{2}$ og synkende for $x > \frac{3}{2}$.

f har derfor globalt maksimumspunkt i $x = \frac{3}{2}$.

(Vi ser dette like gjerne direkte ved å fullføre kvadratet: $f(x) = -(x-\frac{3}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2$)

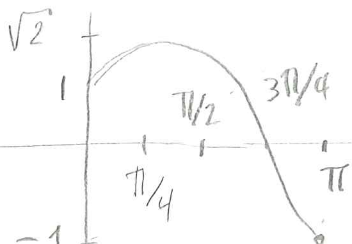
maksimumsverdien er $\frac{9}{4} = \underline{2{,}25}$.

$f(0) = 0 = f(3)$, så $\underline{0 \text{ og } 3}$ er begge minimumspunkt. Minimumsverdien er $\underline{0}$

b) $f(x) = \sin x + \cos x$ $x \in [0,\pi]$

(Faktisk er $f(x) = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$.)

Grafen til f er en "forskyvd" sinuskurve



Maksimumspunkt $x = \pi/4$

Maksimumsverdi $\sqrt{2}$

Minimumspunkt $x = \pi$

Minimumsverdi -1.

Her er $x=0$ et lokalt minimumspunkt

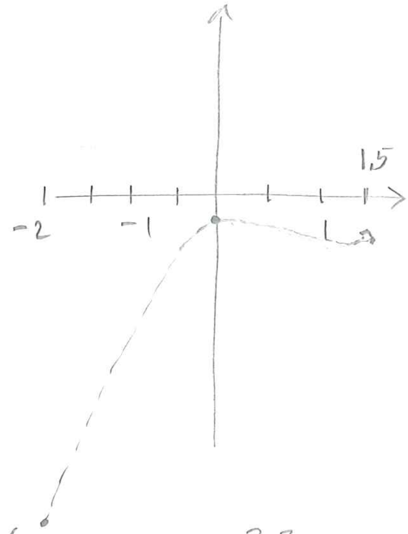
(8)

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2$ $[-2, 3/2]$

$f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4)$

$0 \qquad \frac{4}{3}$

$f'(x)$ + + + + 0 − − − − 0 + + + +



$f(-2) = -8 - 8 - 2 = -18$

$f(0) = -2$

$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27} - \frac{32}{9} - 2 = \frac{64-96}{27} - 2 = \frac{-32}{27} - 2$

$= -3 - \frac{5}{27} \sim -3{,}1851\ldots$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \ldots = -3 - \frac{1}{8} \sim -3{,}125$

Maksimumspunkt $x = 0$ maksimumsverdi -2

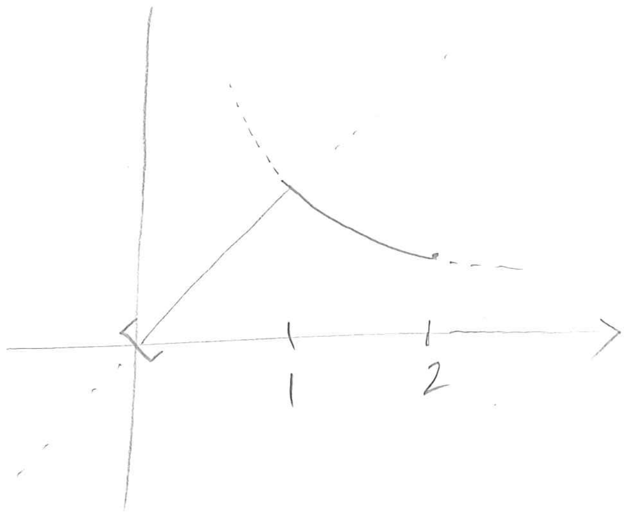
Minimumspunkt $x = -2$ minimumsverdi -18

(Lokalt maks i $x = 3/2$ m. verdi $-3{,}125$

— min i $x = 4/3$ — $-3{,}185$)

2d) $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 1/x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

9



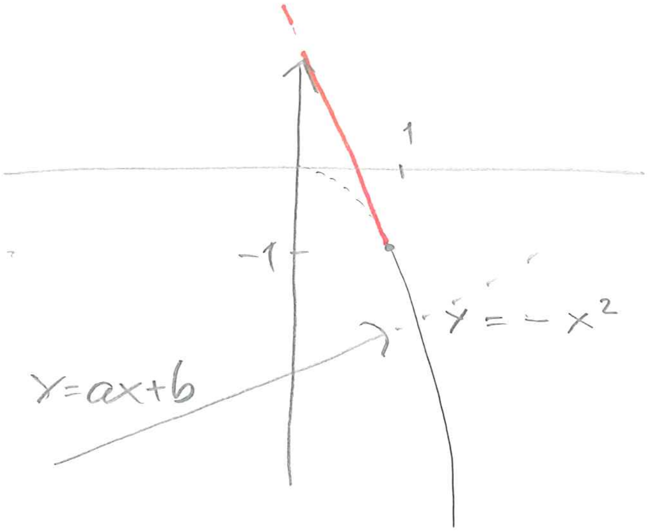
(Funksjonen er kontinuerlig (som påstått))

Maksimumspunkt $x = 1$ maksimumsverdi 1
Minimumspunkt $x = 0$ minimumsverdi 0

Lokalt min.punkt $x = 2$, verdi $1/2$

3

(10)



Grafen er kontinuerlig hvis

$$a \cdot 1 + b = -(1)^2 = -1$$

Grafen er deriverba i $x = 1$ hvis

$$(ax+b)'\big|_{x=1} = (-x^2)'\big|_{x=1}$$

(tangentlinjen til $-x^2$ i $(1,-1)$ er linjen $y = ax + b$.)

Dette gir likningssettet

$$a + b = -1$$

og $\quad a = -2$

så $\quad b = -1 - a = -1-(-2) = \underline{1}$

Parametre må derfor være $\underline{a = -2 \text{ og } b = 1}$

og linjesegmentet er $y = \underline{-2x+1}$.

(Det stemmer bra med skissen ovenfor)

(11)

4 Linjene som er parallelle til $y = 3-x$ er presis alle linjer med stigningstall -1. Tangentlinje til $f(x)$ er dafor parallelle til $y=3-x$ presis i punkt hva $f'(x) = -1$.

Vi finner dei punkta:

$$f'(x) = (x^3 - 2x^2 - 2)'$$
$$= 3x^2 - 4x = x(3x-4)$$

$$f'(x) = -1 \iff 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2\cdot 3}$$

$$x = \frac{2 \pm 1}{3} \quad \text{så} \quad x = 1 \text{ og } x = \frac{1}{3}.$$

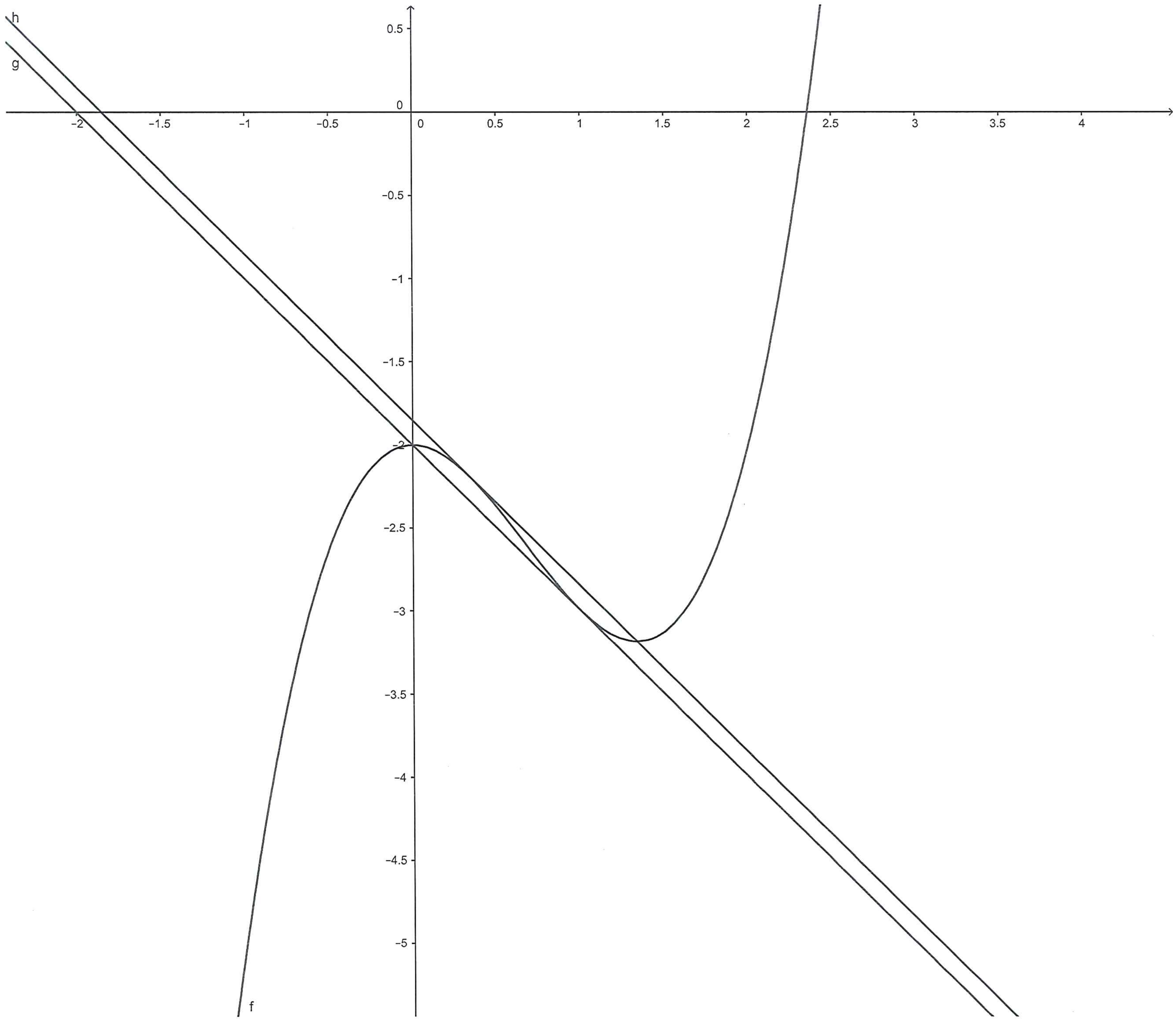
Vi benytter ett-punktsformelen til å beskrive tangentlinjene gjennom $(1, f(1))$ og $(\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3}))$

$$y = -1(x-(1)) + (1^3 - 2\cdot 1^2 - 2)$$
$$y = -x + 1 + 1 - 2 - 2 = \underline{-x - 2}$$

og

$$y = -1(x - (\tfrac{1}{3})) + (\tfrac{1}{3})^3 - 2\cdot(\tfrac{1}{3})^2 - 2$$
$$= -x + \frac{1}{3} + \frac{-5}{27} - 2 = \underline{-x - 2 + \frac{4}{27}}$$

$\xrightarrow{\hspace{1cm}}$ FIGUR


h
g
f
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
-2.5
-3
-3.5
-4
-4.5
-5

(12) 5 a) $x^3 - x - 1 = 0$ $x \in [1,2]$

La $f(x) = x^3 - x - 1$

Da er $f(x)$ en kontinuerlig funksjon

hvor $f(1) = -1$ og $f(2) = 8-2-1 = 5$

funksjonsverdiene i endepunktene har motsatt fortegn.

Den deriverte er $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$
for $x \in [1,2]$.

Skjæringssetningen gir at $f(x) = 0$ har minst en løsning i intervallet $[1,2]$.
Siden funksjonen er økende, vil den derfor ha presis ett nullpunkt i $[1,2]$.

Vi benytter Newtons metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}.$$

Eg benytter geogebra til å gjøre følgende beregninger

$x_0 = 1{,}5$ (prøver med verdien midt mellom 1 og 2)

$x_1 = 1{,}34\ldots$ $x_2 = 1{,}325\ldots$ $x_3 = 1{,}3247181\ldots$

$x_4 = 1{,}3247179\ldots$

→

13

Løsningen er (ca) $\underline{x = 1,3247}$

5b) $\sqrt[3]{x} = \frac{1-x}{5}$ $x > 0$

Løsninger til likningen er det samme som null-punkt til $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{1-x}{5}$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{5} > 0$$

Vi har en kontinuerlig stigende funksjon for $x \geq 0$. Siden $f(0) = \frac{-1}{5} < 0$

og $f(1) = 1 > 0$

Så sier skjæringssetningen at det er minst ett nullpunkt på intervallet $[0, 1]$.
Siden $f(x)$ er stigende og kont. på $\langle 0, \infty \rangle$ så er det presis ett nullpunkt for $x > 0$.

Newtons metode fungerer ikkje så bra her. (sjekk med geogebra-appen for å se hva som skjer).

Vi benytter derfor halveringsmetoden.

Vi får $\underline{x = 0,0078139}$

(halveringsmetoden bør i dette tilfellet ha minst 25 itterasjoner)

(14) 5c) $e^x = \ln x + 10 \qquad x \geq 1$

Løsningen svarer til nullpunkt for

$f(x) = e^x - \ln x - 10$.

$f(x)$ er en kontinuerlig funksjon for $x \geq 1$.

$f'(x) = e^x - \frac{1}{x} > 0$ for $x \geq 1$

$f(1) = e - 10 < 0 \qquad f(3) = e^3 - \ln 3 - 10$

$(f(2) = -3.3\ldots < 0 \qquad \sim 8.98\ldots > 0$

Skjæringssetning sammen med egenskapen at funksjonen er voksende gir at det er akkurat ett nullpunkt for $x \geq 1$ (og det ligger i intervallet $[2, 3]$.

Vi benytter Newtonsmetode med startverdien $x_0 = 2.5$ midt mellom 2 og 3. (Gjør utregningene i geogebra)

$x_0 = 2.5 \qquad x_1 = 2.39 \qquad x_2 = 2.38599$

$x_3 = 2.385970 \qquad x_4 = 2.385970$

Løsningen er $x = \underline{\underline{2.3859}}$

(15)

6 a) $y'' + 4y = 0$

Forsøker med $y = e^{rx}$. Setter inn y:

$(r^2+4)e^{rx} \underset{\text{alle } x}{=} 0 \iff r = \pm 2i$.

Løsningene er derfor på formen

$$y = A\sin(2x) + B\cos(2x)$$

(Dette er $Ce^{2xi} + De^{-2xi}$ hvor
$A = \frac{C+D}{2}$ og $B = \frac{C-D}{2i}$)

Vi setter nå $y(\frac{\pi}{4}) = 2$ og $y'(\frac{\pi}{4}) = 2$:

($y' = 2(A\cos(2x) - B\sin(2x))$
$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ og $\cos(\frac{\pi}{2}) = 1$)

$y(\frac{\pi}{4}) = 2$ gir $A = 2$

$y'(\frac{\pi}{4}) = 2$ gir $-2B = 2$ så $B = -1$.

Løsningen er $y(x) = 2\sin(2x) - \cos(x)$.

(16)

6 b) $y'' - y' = 3$

Dette er en lineær andre ordens diff. likning med konstante koeffisienter.

Den er inhomogen. Det tilsvarende homogene problemet er $y'' - y' = 0$.

Hvis vi anta $y = e^{rx}$ får vi

$$(r^2 - r)\, e^{rx} = 0 \quad \text{(for alle } x\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 - r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 0 \text{ og } r = 1.$$

Siden $e^{0 \cdot x} = 1$ er konstant får vi

$$\underline{y_h = A e^x + B}.$$

Vi vet at det er en partikulær løsning som er et polynom. (av grad $1 + \text{grad}(3) = 1$, siden koeff. til y er 0 og koeff. til y' er ulik 0)

Vi ser at $y = 3x$ er en partikulær løsning

Løsningen til diff likningen er da:

$$y(x) = \underline{A e^x + 3x + B}$$

[Her ville det vært enda enklere å la $y' = w$ og løse diff. likningen $w' - w = 3$, og deretter integrere opp w for å finne z]

(17)

6c) $2y'' - 3y' + y = e^x$

Vi løser først det homogene problemet

$2y'' - 3y' + y = 0.$ Anta $y = e^{rx}$

$(2r^2 - 3r + 1)e^{rx} = 0$ alle x

$\Leftrightarrow \quad 2r^2 - 3r + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad r = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2\cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4}$

$r = 1$ og $r = \frac{1}{2}$

De homogene løsningene er derfor

$y_h = Ae^x + Be^{x/2}$.

Vi prøver nå å finne en partikulær løsning (til det inhomogene problemet).
Siden e^x er en homogen løsning får vi ikke en partikulær løsning på formen Ae^x. Vi forsøker istede med $x \cdot Ae^x$.

$(xe^x)' = (x)'e^x + x\cdot(e^x)' = e^x + xe^x$

$(xe^x)'' = (e^x)' + (xe^x)' = 2e^x + xe^x$

Setter vi Axe^x inn i diff. likningen får vi

$2\cdot A(2e^x + xe^x) - 3\cdot A(e^x + xe^x) + Axe^x = e^x$

$(4-3)\cdot Ae^x + 0\cdot Axe^x = e^x$ så $\underline{A = 1}$

$\longrightarrow$

18

Løsningene til diff.-likningen er derfor

$$Y(x) = xe^x + Ae^x + Be^{x/2}$$

Vi bestemmer nå A og B slik at $Y(0) = 1$

$Y'(1) = 0$.

$$Y(0) = A + B = 1$$

$$Y'(1) = 1 + A + \tfrac{1}{2}B = 0$$

$$A + B = 1$$

$$A + \tfrac{1}{2}B = -1$$

$$(1-1)A + (1-\tfrac{1}{2})B = 1-(-1) = 2$$

$$\tfrac{1}{2}B = 2$$

$$\underline{B = 4}$$

$$\underline{A} = 1 - B = \underline{-3}$$

Løsningen til initialproblemet er derfor

$$Y(x) = xe^x - e^x + 4e^{x/2}$$

(19)

7 Anta Løsningene er på formen

$$q(t) = e^{rt}.$$

Setter inn og får:

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$$

$$r = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}.$$

$R^2 > 4L/C$:

$$q(t) = A\exp\left(\left(\frac{-R+\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}\right)t\right) + B\exp\left(\left(\frac{-R-\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}\right)t\right)$$

$R^2 = 4L/C$:

$$q(t) = (Ax+B)\exp\left(\frac{-R}{2L}t\right)$$

$R^2 < 4L/C$:

$$q(t) = \exp\left(\frac{-R}{2L}t\right)\left[A\sin\left(\frac{\sqrt{4L/C-R^2}}{2L}t\right) + B\cos\left(\frac{\sqrt{4L/C-R^2}}{2L}t\right)\right].$$

Den deriverte til q er funksjoner på samme form

Strømmen svinger frem og tilbake når

$$R^2 < 4L/C \iff \underline{R < \sqrt{4L/C}}$$

siden R, C, L er alle positive

(20)

7 b) Perioden T til $\sin(rt)$ er tiden det tar å utføre en hel periode

$$r \cdot T = 2\pi$$

så $\underline{T = \frac{2\pi}{r}}$.

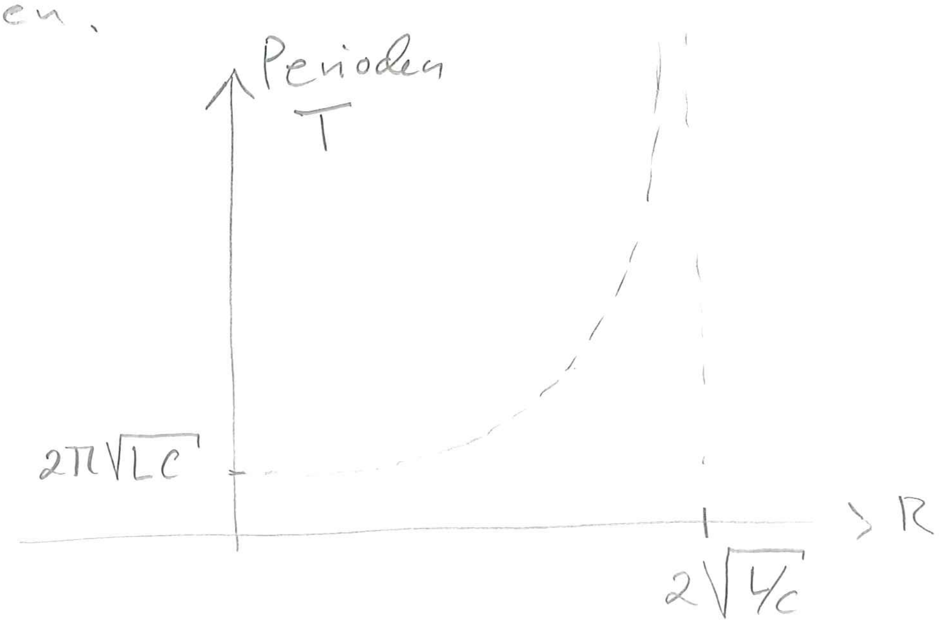
Siden $r = \frac{\sqrt{4L/C - R^2}}{2L}$ så er

perioden $T = \frac{4\pi L}{\sqrt{4L/C - R^2}}$

$$\left(= 2\pi\sqrt{LC} \Big/ \sqrt{1 - R^2C/4L} \right)$$

Når R øker fra 0 til $2\sqrt{\frac{L}{C}}$ så øker også perioden. Når R nærmer seg $2\sqrt{\frac{L}{C}}$ blir perioden vilkårlig lang.

Dette er rimelig ettersom motstanden "bremser" opp strømmen.



7 c)

21

$$Rq' + \frac{1}{C} q = 0$$

Setter vi inn e^{rt} får vi

$$\left(R \cdot r + \frac{1}{C}\right) e^{rt} = 0 \quad \text{(alle } t\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{-1}{RC}.$$

Løsningene er $\quad q(t) = A\, e^{-t/RC}$.

Strømmen er da $\quad I(t) = q'(t) = \frac{-A}{RC} e^{-t/RC}$

$$\underline{I(t) = I_0\, e^{-t/RC}}$$

(hvor $I_0 = \frac{-A}{RC}$, $\quad I_0 = I(0)$ strømstyrken ved tiden $t=0$)

$$I(5RC) = I_0 e^{-5RC/RC} = I_0 e^{-5} = \frac{I_0}{e^5}$$

$$e^5 = 148.41\ldots$$

$$I(5RC) \simeq \frac{1}{148} I_0 = 0.0067\, I_0$$

(litt under en prosent av opprinnelig strømstyrke.)

Hvis $I(t) = 10^{-6} I_0$ da må

$$e^{-t/RC} = 10^{-6} \quad \text{så} \quad -\frac{t}{RC} = -6 \cdot \ln 10$$

$$= e^{-6 \cdot \ln 10}$$

$$t = 6 \cdot \ln(10) \cdot RC \sim \underline{13.8\, RC}$$

22

8 Skriptet implementerer Eulers metode.

Skriptet tegner opp et estimat for løsningen til diff. likningen

$$y' = \frac{x^2}{y-1} \qquad y(1) = \frac{1}{2}$$

basert på Eulers metode over intervallet $[1, 2]$ med 400 steg.