3 okt 2016

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

1

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{\text{koeffisientmatrisen}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Lineære likningssystem har

∞ mange løsninger
eller én løsning } konsistent

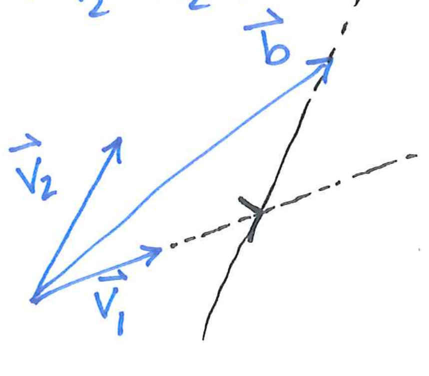
eller ingen løsninger } inkonsistent.

Geometrisk fortolkning:

$$M\vec{x} = \vec{b} \qquad M = [\underbrace{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n}_{\text{søylevektorer}}]$$

$$\vec{V}_1 \cdot x_1 + \vec{V}_2 \cdot x_2 + \cdots + \vec{V}_n \cdot x_n = \vec{b}$$

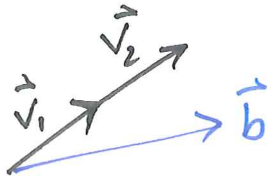
$n=2$



$$2\cdot\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{b}$$

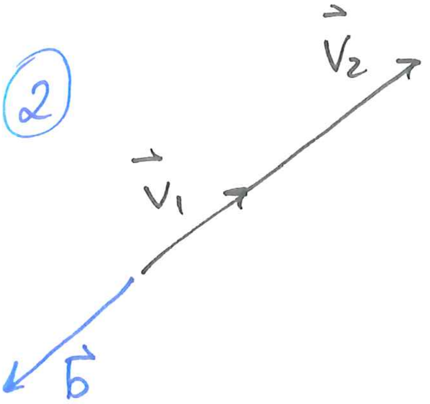
én løsning for alle $\vec{b}$

$n=2$



ingen løsning (når $\vec{b}$ ikkje er parallell til $\vec{V}_1$ og $\vec{V}_2$)

(2)



∞ mange løsninger

($\vec{b}$ parallell til $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$)

Lineære system kan være ustabile.

($2x = 3$ $\quad x = 3/2$

Løsningen endres lite om 2 eller 3 endres lite)

$$10^{-6} x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$10^{-6} x = \frac{1}{1000} \Rightarrow x = \frac{10^{-3}}{10^{-6}} = 10^{-3} \cdot 10^{6} = \underline{1000}$$

liten endring

stor endring.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.001 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

liten endring

stort utslag!

Søylevektorene er nesten parallelle

Problemet

③

Inversmatrisen til en kvadratisk ($n \times n$-matrise) A er en matrise A^{-1} slik at

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n \quad , \quad A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}_n$$

$\Bigg(\underset{\text{identitetsmatrisen}}{\mathbb{1}_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}}, \quad M \cdot \mathbb{1}_n = M \quad , \quad \mathbb{1}_n \cdot M = M \Bigg)$

Vi sier at A er inverterbar hvis A^{-1} finnes. Da er A^{-1} med egenskapene ovenfor entydig (finnes bare én slik matrise).

Anta A er inverterbar.

Løsningene til $A\vec{x} = \vec{b}$

er da $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

(A^{-1} ganges fra venstre : $\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{\mathbb{1}_n} \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad)$$

Hvis A er inverterbar

og $A \cdot M = 0$, da er $M = 0$

(gang med A^{-1} fra venstre...)

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 0-matrisen

4 A er ikkje inverterbar.

Eksempel $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}_2$$

$$B \cdot A = \cdots = \mathbb{1}_2$$

Så $\underline{B = A^{-1}}$

Løs likningssystemet

$$2x_1 + 5x_2 = k$$
$$x_1 + 3x_2 = l$$

for alle verdier av k og l.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

A inverterbar

Så $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$$

$$\underline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k - 5l \\ -k + 2l \end{bmatrix}}$$

En kvadratisk matrise $A = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$
er inverterbar $\Leftrightarrow$ $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ er lineært uavhengige.

5

(ingen av vektorene $\vec{v}_i$ kan kan uttrykkes som en lineær kombinasjon av dei andre vektorene.)

Egenskaper til inversmatriser.

* $(A^{-1})^{-1} = A$
* $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (bytter rekkefølge)

$$\left(\begin{aligned} A \cdot \underbrace{B(B^{-1}}_{1} \cdot A^{-1}) &= A \cdot 1_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = 1_n \\ (B^{-1}A^{-1})(A \cdot B) &= \dots = 1_n \end{aligned} \right)$$

Vi skal nå se på inversmatriser til generelle 2×2 matriser og finne et kriterie for når dei finnes. $\longrightarrow$

6 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a, b] \\ [c, d] \end{bmatrix}$

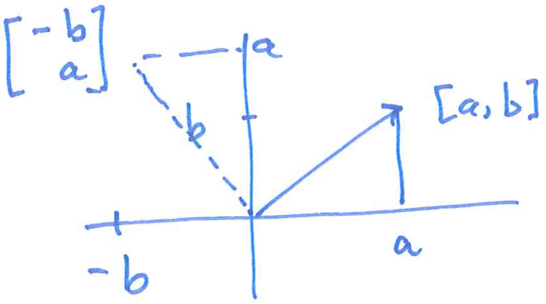
ønsker å finne søylevektorer $[\vec{s}_1, \vec{s}_2]$ slik at

$$M \cdot [\vec{s}_1, \vec{s}_2] = \mathbb{1}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[a, b] \cdot \vec{s}_1 = 1$ $\qquad$ $[a, b] \cdot \vec{s}_2 = 0$

$[c, d] \cdot \vec{s}_2 = 1$ $\qquad$ $[c, d] \cdot \vec{s}_1 = 0$

$\vec{s}_1 = k \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{s}_2 = l \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$



setter inn i de to første likningene:

$$[a, b]\, k \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} = k(ad - bc) = 1$$

$$[c, d] \cdot l \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} = l(ad - bc) = 1$$

M er ikkje inverterbar hvis $ad - bc = 0$

M er inverterbar med invers

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$ hvis $ad - bc \neq 0$.

deler på $ad - bc$.

* bytter diagonalelementene
snur fortegnet til dei ikkje diagonale elementene.

Finn inversmatrisen til

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$ad - bc = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 5 = 11$$

$$\underline{M^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

7

$$N = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Når er N inverterbar og hva er inversmatrisen?

N er inverterbar når $1(-3) - 2 \cdot a = -3 - 2a \neq 0$

(Dette er lik 0 når $a = \frac{-3}{2}$)

N er inverterbar presis når $a \neq \frac{-3}{2}$. Da er inversmatrisen

$$N^{-1} = \frac{1}{-2a-3} \begin{bmatrix} -3 & -a \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Likningssystemet $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$

har én løsning når N er inverterbar.

For $a \neq \frac{-3}{2}$ så er løsningen

8

$$\vec{X} = N^{-1}\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix} = \frac{1}{-2a-3}\begin{bmatrix}-3 & -a\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{2a+3}\begin{bmatrix}-a^2-3\\a-2\end{bmatrix}$$

La oss sjekke hva som skjer når $a = \frac{-3}{2}$ og N ikkje er inverterbar.

Vi setter $a = -3/2$ og får totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & -3/2 & 1\\2 & -3 & -3/2\end{array}\right] \overset{-2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1 & -3/2 & 1\\0 & 0 & -7/2\end{array}\right]$$

Likningssystemet har da ingen løsninger.