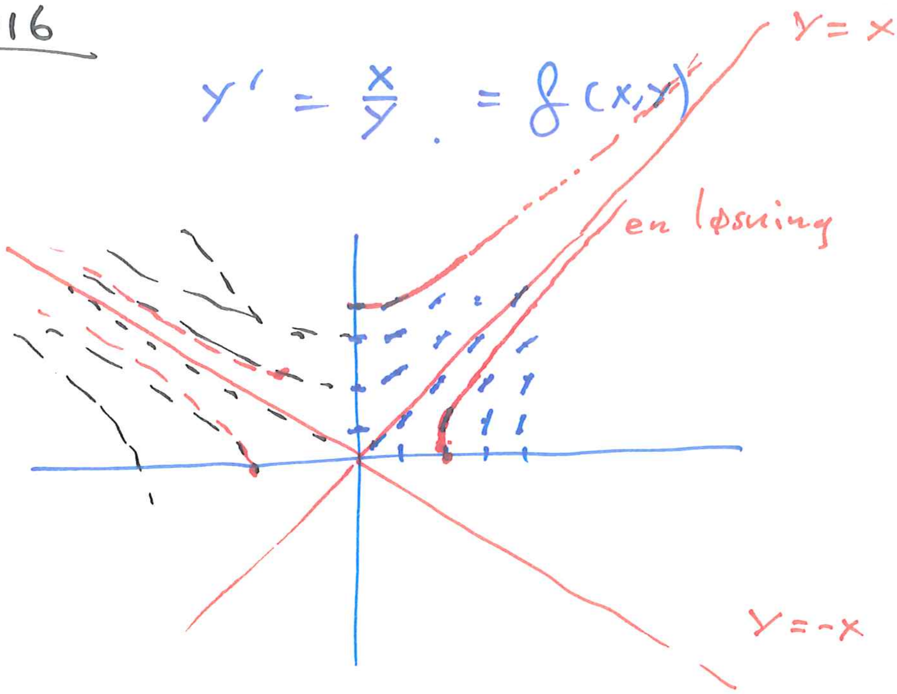
7.09.2016

Oppgave til i dag $\quad y' = \frac{x}{y} = f(x,y)$

Retningsfelt

(1)



Løsningene er: $\quad y = x$

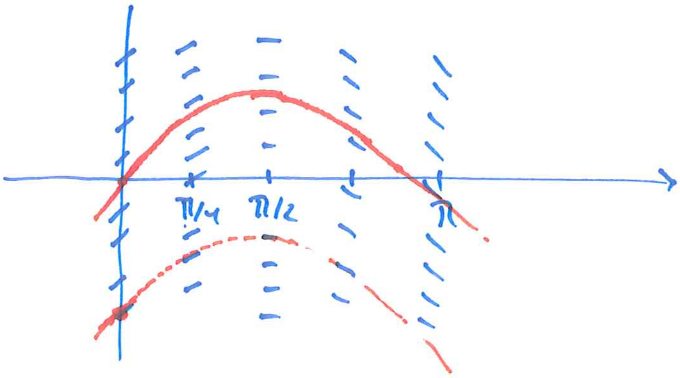
$\quad\quad y = -x$

$y^2 = x^2 + k$ andre løsninger er deler av hyperbler.

$y^2 - x^2 = k \quad (k \in \mathbb{R})$

Eksempel $\quad y' = \cos x \quad y(0) = 0$

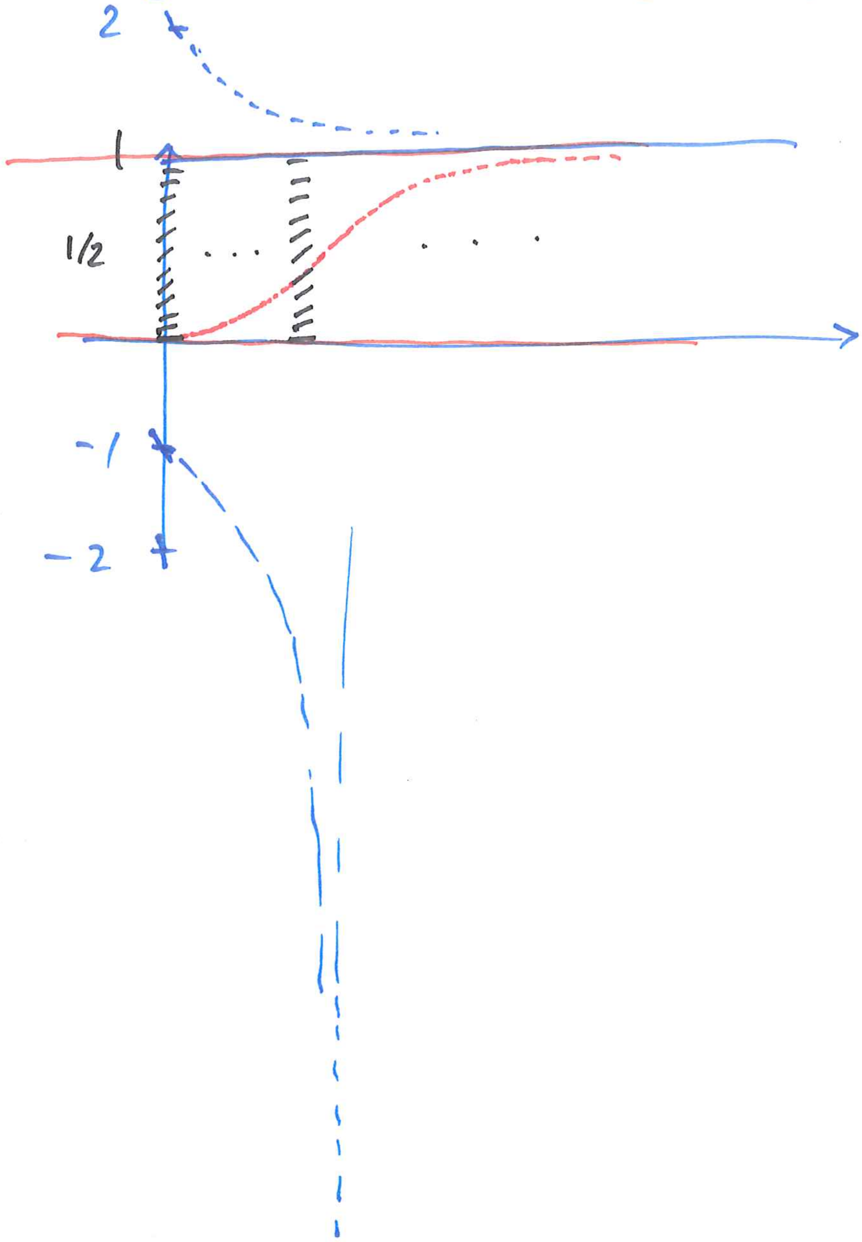
(sin x er løsningen)



Logistisk diff. likning

(2) $$y' = y(1-y)$$

(generelt $ky(N-y)$ $k>0$)

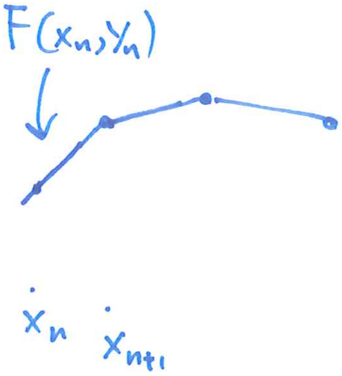


$$y' = \frac{1}{x+y} = F(x,y) \qquad y(1) = 0$$

(3) Estimer $y(1.2)$ til løsningen av diff. likningen ved bruk av Eulers metode m. steglengde 0.1.

EULERS METODE

$$y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n) \cdot d$$



$$x_0 = 1 \qquad x_1 = 1 + 0.1 = 1.1, \qquad x_2 = 1.2$$

$$y_0 = 0 \qquad y_1 = y_0 + \frac{1}{x_0 + y_0} \cdot 0.1$$

$$y_1 = 0 + \frac{1}{1+0} \cdot 0.1 = \underline{0.1}$$

$$y_2 = y_1 + F(x_1, y_1) \cdot d$$

$$= 0.1 + \frac{1}{1.1 + 0.1} \cdot d$$

$$= 0.1 + \frac{1}{1.2} \cdot 0.1 = 0.1\left(1 + \frac{1}{6/5}\right)$$

$$= 0.1\left(1 + \frac{5}{6}\right) = \underline{\underline{0.1 \cdot \frac{11}{6}}} \quad (\sim 0.183\ldots)$$

2. ordens lineære diff. likninger med konstante koeffisienter.

4

$$y'' + y' + y = 0$$

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Prøver med

$$y(x) = e^{rx}$$
$$y'(x) = re^{rx}$$
$$y''(x) = r^2 e^{rx}$$

Setter inn:

$$y'' + y' + y = 0$$

$$(r^2 + r + 1)e^{rx} = 0. \quad (\text{for alle } x)$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 + r + 1 = 0$$

Løsningene til likningen: $r = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}$

$$r = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} = \underline{\frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i}.$$

Løsningene til diff. likningen

$$A \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)x} + B e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)x}$$

$$y = e^{-x/2}\left[A\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)i\right) + B\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\cdot i\right)\right]$$

5

$$\vdots$$

$$= e^{-x/2}\left(C\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + D\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

Presentasjon som gir reelle funksjoner når C, D er reelle.

Sammenligner koeffisienter :

$$A+B = C$$

$$(A-B)i = D$$

$(A-B = -i\cdot D$ så $A = \frac{1}{2}(C - iD)$ etc.$)$

Eksempel:

$$y'' + 9y = 0$$

Anta $y = e^{rx}$. setter

$(r^2+9)e^{rx} = 0$ alle x $\iff$ $r^2+9=0$

$$r^2 = -9$$

$$r = \pm 3i$$

Løsningene $(Ae^{3ix} + Be^{-3ix} \ldots)$

$$y(x) = C\cdot\cos(3x) + D\sin(3x).$$

6 $\quad y'' + 2y' + y = 0$

Anta: $y(x) = e^{rx}$

$$(r^2 + 2r + 1)\, e^{rx} = 0 \quad \text{alle } x$$

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$(r+1)^2 = 0 \qquad \text{én løsning } \underline{e^{-x}}$$

$$y = A e^{-x} \qquad \text{bare én frihetsgrad !}$$

Det viser seg at $\quad y = B\, x \cdot e^{-x}$

også er en løsning.

$$y' = (x e^{-x})' = (x)' e^{-x} + (x) \cdot (e^{-x})'$$
$$= e^{-x} + (-x e^{-x})$$

$$y'' = -e^{-x} - (x e^{-x})'$$
$$= -e^{-x} - e^{-x} + x e^{-x}.$$

$y'' + 2y' + y =$

$$\left(\underbrace{-2e^{-x} + x e^{-x}) + 2(e^{-x}}_{\text{kansellerer}} - x e^{-x}\right) + x e^{-x} = 0$$

Løsningene er $\quad \underline{y(x) = A e^{-x} + B \cdot x e^{-x}}$