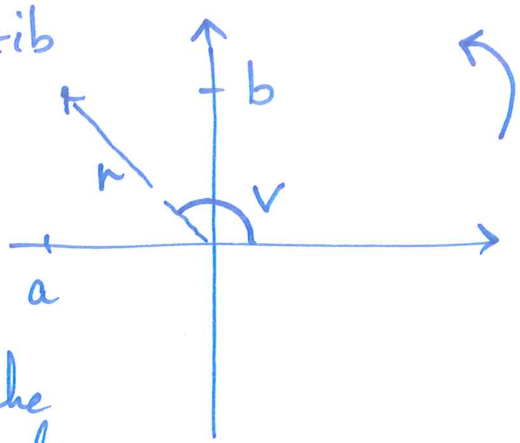
22.08

Multiplikasjon av komplekse tall

$z = a + ib$

kartesiske koordinater



r avstand fra origo

v vinkel (radianer)

$360° = 2\pi$ radian

$90° = \frac{\pi}{2}$ radian

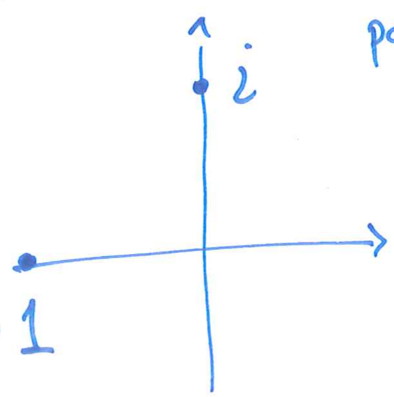
$r = |z| \geq 0$

$r = 0$ når $z = 0$

Vi kan beskrive punkt i (det komplekse) planet ved polare koordinater r, v.

Resultat: Kompleks multiplikasjon er gitt ved å gange sammen lengdene til tallene og legge sammen (addere) vinklene.

Eksempler:



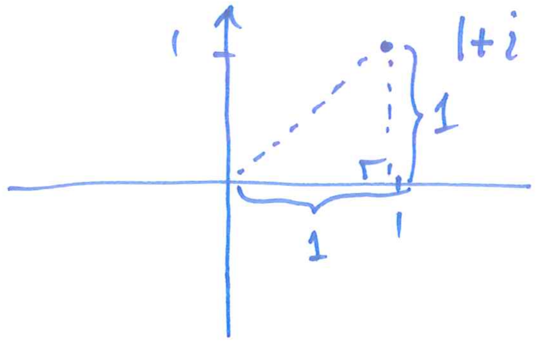
polare koordinater

i lengde 1 vinkel 90°

$i^2 = -1$

lengde 1

vinkel 180°



$1+i = z$

vinkel $v = \frac{\pi}{4}$ (45°)

$|z| = r = \sqrt{2}$

$(1+i)^2 = z^2$

forventer lengde: $\sqrt{2}^2 = \underline{2}$

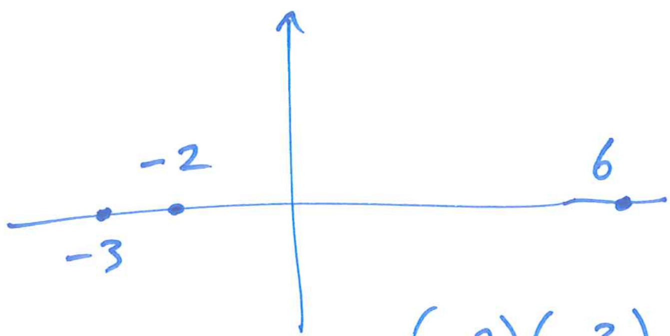
vinkel: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \underline{\frac{\pi}{2}}$

$$(1+i)^2 = (1+i)(1+i)$$

$$= \underbrace{1+i^2}_{0} + 1\cdot i + i\cdot 1 \quad = 2i \quad \checkmark$$

lengden er 2

og vinkelen er $\frac{\pi}{2}$!

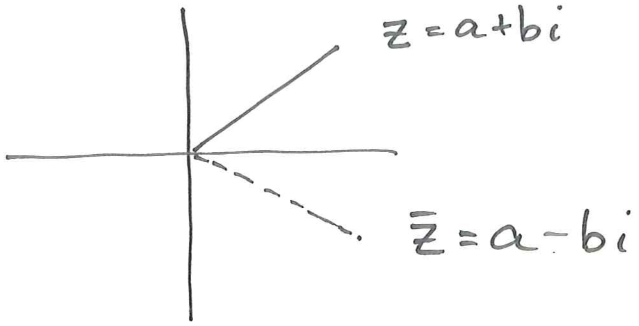


-2 lengde 2, vinkel π

-3 — 3, — π

$(-2)(-3)$ lengde $2\cdot 3 = 6$

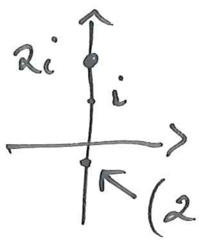
vinkel $\pi + \pi = 2\pi$



Kompleks konjugasjon : Refleksjon om den reelle aksen.

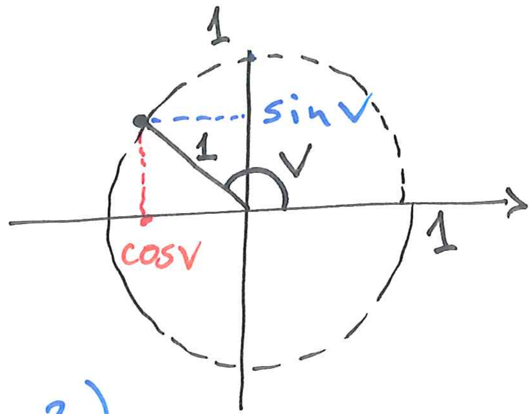
Invers element z^{-1} : Refleksjon om reel akse dele med lengden kvadrert.

eks



$(2i)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)(-i) = -\frac{1}{2}i.$

Sinus og cosinus



Pytagoras $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$
for alle v

$\left(\cos^2 v = (\cos v)^2 \neq \cos v^2\right)$

tangens $\tan v = \dfrac{\sin v}{\cos v}$. $\cos(v) \neq 0$

$\cos(0) = 1$ $\quad \sin(0) = 0$ $\quad \tan 0 = 0$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $\quad \cancel{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

tan er ikkje definert for $v = \frac{\pi}{2}$.

polare koordinater — kartesiske koordinater

lengde vinkel

$r, V \longmapsto r\cos(V) + r\sin(V)\, i$

lengden $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \longleftarrow z = a+bi$

Hva er V?

$\tan(V) = \frac{b}{a}$ (når $a \neq 0$)

Det er ikkje tilstrekkelig å bare forsøke å anvende invers tan for å finne vinkelen V.

Hvis
- $a=0$, $b>0$: $V = \frac{\pi}{2}$
- $a=0$ $b<0$: $V = \frac{3\pi}{2}$
- $a=0$ $b=0$: V ikke bestemt

$a \neq 0$ $\quad \tan(V) = \frac{b}{a}$

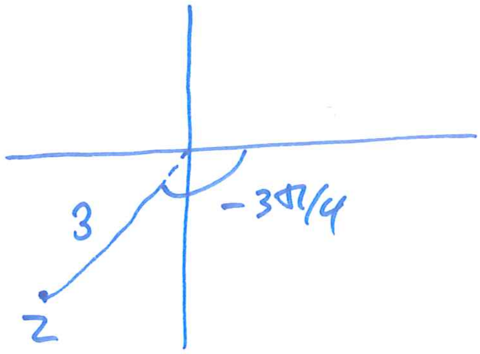
- $a>0$ $\quad \underline{V = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$
- $a<0$ $\quad \underline{V = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi}$

Eks.

polar → kartesisk

$r = 3 \qquad V = -\frac{3\pi}{4} \qquad (-135°)$

På kartesisk form : $r\cos V + r\sin(V)\,i$

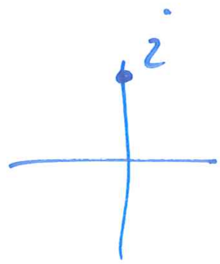


$$z = 3\Big(\underbrace{-\cos(45°)}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \big(\underbrace{-\sin(45°)}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\big)\, i\Big)$$

$$\underline{z = \frac{-3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\, i}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

kartesisk → polare koordinater :



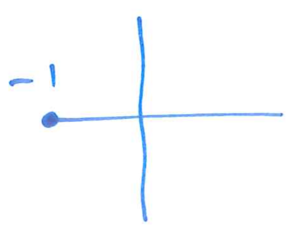
i vinkel : $\pi/2$

lengde 1

$1+2i \qquad \tan V = \frac{2}{1} = 2$

$V = \arctan(2) = 1.107\ldots$ rad

lengden $r = |1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$.



$-1 \quad (= -1 + 0 \cdot i)$

lengden $|-1| = 1$

vinkelen er π

Eulers formel

$$\boxed{e^{iv} = \cos(v) + \sin(v)\, i}$$

e
Eulertallet
$e = 2.71828\ldots$

$$z = r\, e^{i \cdot v}$$

r lengde
v vinkel.

$$e^{2 + (\pi/2) \cdot i} = e^2 \cdot \underbrace{e^{(\pi/2) i}}_{i} = e^2 \cdot i$$

$$e^{i \cdot v} \cdot e^{i \cdot u} = e^{i(v+u)}$$ (potensregel)

e^{iv} tar sum til produkt

$$e^{i \cdot 0} = e^0 = 1.$$

$$(e^{iv})' = i\, e^{iv}.$$

$$(\cos v + i \sin v)' = (\cos v)' + i(\sin v)'$$
$$= -\sin v + i \cos v$$
$$= i(\cos v + i \sin v)$$

Derfor er $(e^{iv})' = i\, e^{iv}$