9.04.2015

Homogen diff. likning

$$y'' + 2py' + qy = 0$$

1

$y = e^{rx}$ løsning $\Leftrightarrow$ $r^2 + 2pr + q = 0$

$$r = -p \pm \sqrt{p^2 - q}.$$

Hvis $p^2 - q = 0$, da er også xe^{-px} en løsning.

underdempet $p^2 < q$

$$y = Ae^{-px}\sin(\sqrt{q-p^2}\,x) + Be^{-px}\cos(\sqrt{q-p^2}\,x)$$

Kritisk dempet $p^2 = q$

$$y = (A + Bx)e^{-px}$$

overdempet $p^2 > q$

$$y = Ae^{-px + \sqrt{p^2-q}\,x} + Be^{-px - \sqrt{p^2-q}\,x}.$$

9.04.2015 Inhomogen diff. likning

(2)
$$y'' + 2p\,y' + q\,y = K\cos cx$$
$$= K\,\mathrm{Re}\,(e^{icx})$$

$$z'' + 2p\,z' + q\,z = Ke^{icx}$$

$\mathrm{Re}\,z = y$ er en løsning til den opprinnelige diff. likningen.

Prøver med $z = \ell \cdot e^{icx}$

$z' = ic\,z$, $z'' = -c^2 z$

setter inn:
$$(-c^2 + 2p(ic) + q)\,\ell\, e^{icx} = Ke^{icx}$$

så $\ell = \dfrac{K}{q-c^2+2pci} = \dfrac{K(q-c^2-2pci)}{(q-c^2)^2+4p^2c^2}$

$$y = \mathrm{Re}\,(\ell\cdot e^{icx}) = \mathrm{Re}\,K\frac{(q-c^2)-2pci}{(q-c^2)^2+4p^2c^2}\,(\cos(cx)+i\sin(cx))$$
$$= \underline{\frac{K}{(q-c^2)^2+4p^2c^2}\Big((q-c^2)\cos(cx) + 2pc\sin(cx)\Big)}$$

Kombinert med de homogene løsningene får vi alle løsningene:

$$y(x) = \frac{K}{(q-c^2)^2+4p^2c^2}\Big((q-c^2)\cos(cx) + 2pc\sin(cx)\Big)$$
$$+\ e^{-px}\Big(A\sin\big(\sqrt{q-p^2}\,x\big) + B\cos\big(\sqrt{q-p^2}\,x\big)\Big)$$

i det underdempa tilfellet. Tilsvarende i de to andre tilfellene.

③ Initial verdi problemet $\quad y(0)=P \quad y'(0)=S.$ $\qquad \underline{y = y_p + y_h}$

La $\quad E = \dfrac{K(q-c^2)}{(q-c^2)^2+4p^2c^2} = y_p(0) \qquad F = \dfrac{K\cdot 2pc^2}{(q-c^2)^2+4p^2c^2} = y_p'(0)$

(stor P : P punkt
S stigningstall)

$p^2 > q$

$$y_h(0) = A+B$$

$$y_h'(0) = (A+B)(-p) + \sqrt{p^2-q}\,(A-B)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -p+\sqrt{\ } & -p-\sqrt{\ } \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P-E \\ S-F \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{p^2-q}}\begin{bmatrix} -p-\sqrt{p^2-q} & -1 \\ p-\sqrt{p^2-q} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P-E \\ S-F \end{bmatrix}$$

$p^2 < q$

$$y_h(0) = B$$

$$y_h'(0) = -pB + A\sqrt{q-p^2}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{q-p^2}}\begin{bmatrix} p & 1 \\ \sqrt{q-p^2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P-E \\ S-F \end{bmatrix}$$

$p^2 = q$

$y_h(0) = A$

$y_h'(0) = -pA + B$

4

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p-E \\ s-F \end{bmatrix}.$$

Sjekk gjerne "Resonanse og demping" på geogebra.org (under materiell)