mandag 9 mars 2015

1

9.5 Lineære transformasjoner

H. Fausk

V, W vektorrom

$$T \; : \; V \longrightarrow W \qquad \text{eks} \quad V = \mathbb{R}^n, \quad W = \mathbb{R}^m$$

transformasjon (funksjon, avbildning)

T er en lineær transformasjon hvis

$$T(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = T(\vec{V}_1) + T(\vec{V}_2)$$

$$T(k \cdot \vec{V}) = k\,T(\vec{V}) \qquad k \text{ skalar}$$

Eksempler: $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

1) $T(x) = 5x$ er lineær

$$T(x_1 + x_2) = 5(x_1 + x_2) = 5x_1 + 5x_2 = T(x_1) + T(x_2)$$

$$T(kx) = 5 \cdot kx = k(5x) = k\,T(x)$$

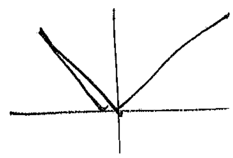
2) Er $T(x) = 2x - 3$ en lin. transformasjon.

$$T(kx) = 2kx - 3 \neq k(T(x)) = k(2x-3)$$

$$T(x_1 + x_2) = 2x_1 + 2x_2 - 3 \neq (2x_1 - 3) + (2x_2 - 3) = T(x_1) + T x_2$$

Nei.

3) $T(x) = |x|$ ikkje lineær!



$$T(-2 \cdot x) = |-2x| = 2|x| \neq -2T(x)$$

$$T(2 + (-3)) = 1 \neq T(2) + T(-3) = 5$$

(2) Alle lin. trans. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er på formen $T(x) = c \cdot x$ for en skalar c.

$$\Big(T(x) = T(x \cdot 1) = x \underbrace{T(1)}_{c} \Big)$$

$T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$

vektor i $\mathbb{R}^m$.

$$T(x) = T(x \cdot 1) = x\, T(1).$$

T er bestemt av $T(1)$.

Alle slike lineære transformasjoner er av type

$T(x) = x \cdot \vec{v}$ for en vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^m$.

$$\vec{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} i$$

e_i er lik 1 i rad i og 0 ellers.

$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = T(x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \cdots + x_n \vec{e}_n)$$

$$= x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \cdots + x_n T(\vec{e}_n)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2), \ldots, T(\vec{e}_n) \end{bmatrix}}_{\substack{m \times n \text{ matrise} \\ \text{standardmatrisen for transformasjonen.}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

– Hva er standardmatrisen til den lineære transformasjonen med egenskapen:

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(3) Vi ønsker å finne $T(\vec{e}_1)$ og $T(\vec{e}_2)$

standardmatrisen er da $[T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2)]$.

$$T(\vec{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-6\\8\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right)$$

så $T(\vec{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - T\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-6\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\-12\end{bmatrix}$$

standardmatrisen er

$$\underline{\begin{bmatrix}9 & -3\\-12 & 4\end{bmatrix}}$$

Visjekker svaret:

$$\begin{bmatrix}9 & -3\\-12 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\cdot 1 + (-3)\cdot 2\\-12\cdot 1 + 4\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix} \checkmark$$

$$\begin{bmatrix}9 & -3\\-12 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6\\8\end{bmatrix} \checkmark$$

Eksempler: Transformasjonen $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som bytter om x og y-koordinatene er lineær.

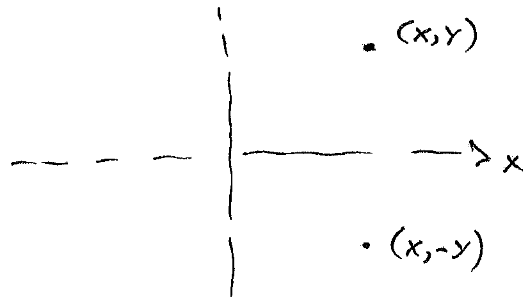
Finn standardmatrisen til denne transformasjonen.

$$\underline{\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}$$

$$[\underset{\overset{\shortparallel}{\vec{e}_2}}{T(\vec{e}_1)} \quad \underset{\overset{\shortparallel}{\vec{e}_1}}{T(\vec{e}_2)}]$$

– Refleksjon om x-aksen (i planet) er en lin. trans.

④ Finn standardmatrisen.

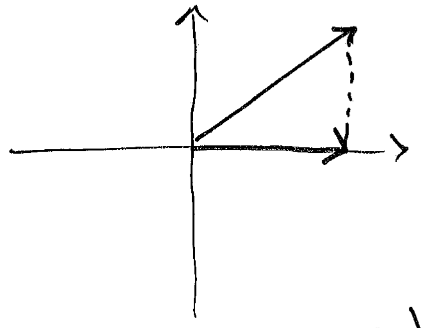


Den er $T(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$

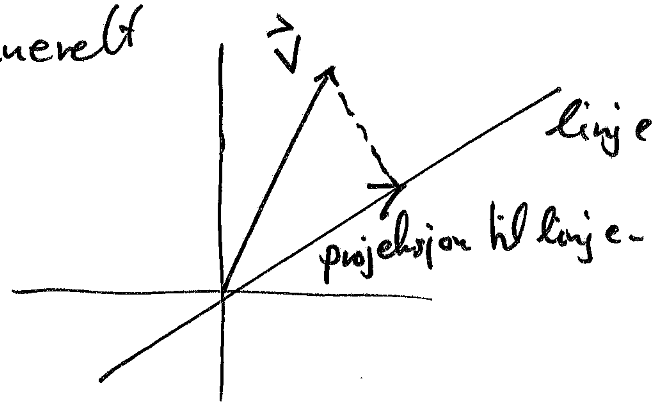
$T(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$

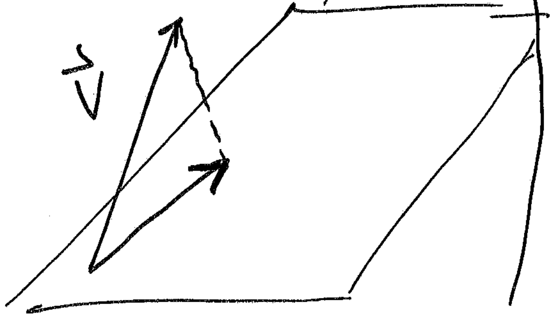
$$\begin{bmatrix} T(e_1), T(e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

– Projeksjon P på x-aksen (i planet).



(generelt





)

projeksjoner er lin. trans. P slik at $P^2 = P$

(idempotent)

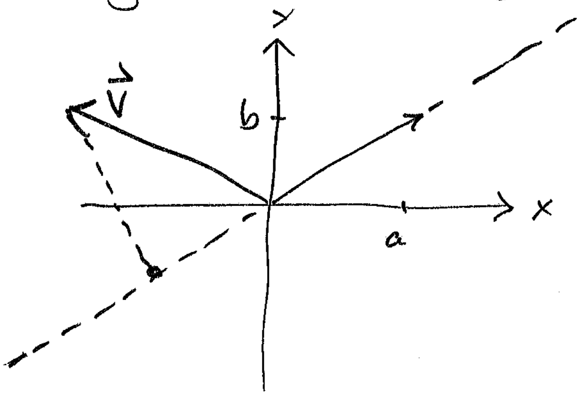
Hva er standardmatrisen? $P(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$

$P(\vec{e}_2) = \vec{0}$

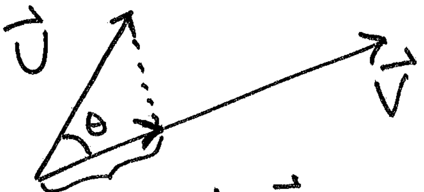
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (vis at: $P^2 = P$)

Finn standardmatrisen til projeksjonen P på linjen gjennom origo og med retningsvektor

5. $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $(\neq \vec{0})$



Vi finner $P(\vec{e}_1)$ og $P(\vec{e}_2)$.



projeksjonen av $\vec{U}$ (ned) på $\vec{V}$:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}| \cdot |\vec{V}| \cos\theta$$

$$(|\vec{U}| \cdot \cos\theta) \cdot \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{|\vec{V}|^2} \vec{V}$$

$P(\vec{e}_1)$ er komponenten ($\vec{e}_1$) til $\vec{e}_1$ langs $[a, b]$

$$= \frac{[a,b] \cdot [1,0]}{|[a,b]|^2} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{a}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$P(\vec{e}_2) \overset{\text{tilsvarende}}{=} \frac{[a,b] \cdot [0,1]}{[a,b]^2} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{b}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

($\vec{e}_2$)

Standardmatrisen er $P = \underline{\dfrac{1}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}}$.

$P^2 = P$ (sjekk dette!)

Transformasjoner $\qquad T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

* $T(x,y) = T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x - y$ linear trans.

* $T(x,y) = \ln\left(e^{2x}/e^{y}\right)$ er dette en linear transformasjon ?

6

$= \ln\left(e^{2x}\right) - \ln e^{y}$

$= 2x - y$ ja.

* $T(x,y) = x \cdot y$

$T(x_1 + x_2, y) = (x_1 + x_2)y = x_1 y + x_2 y$

$= T(x_1, y) + T(x_2, y)$.

T er linear i x-variabelen

og i y-variabelen (hver for seg.)

$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}\right) = (x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2)$

$= x_1 y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_2 + x_2 y_1$

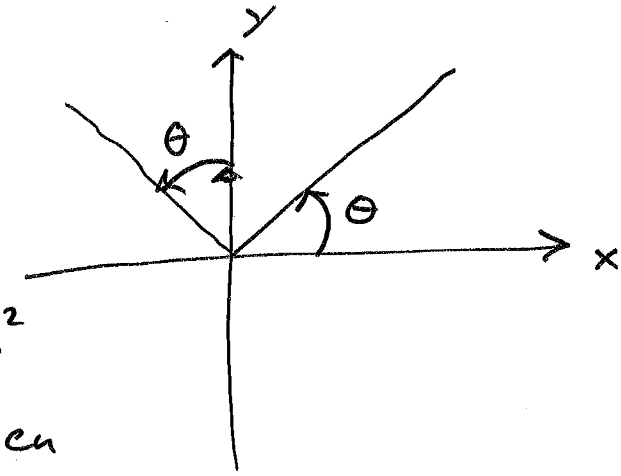
$\neq T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$?

$T\left(k\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}\right) = kx \cdot ky = k^2 xy$

$\neq k\,T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

T er ikke en linear transformasjon.

7



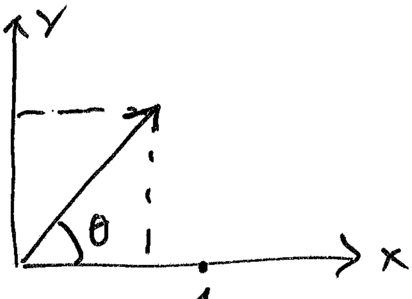
Rotasjon $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
en vinkel θ er en
lin. transformasjon.

Hva er standardmatrisen?

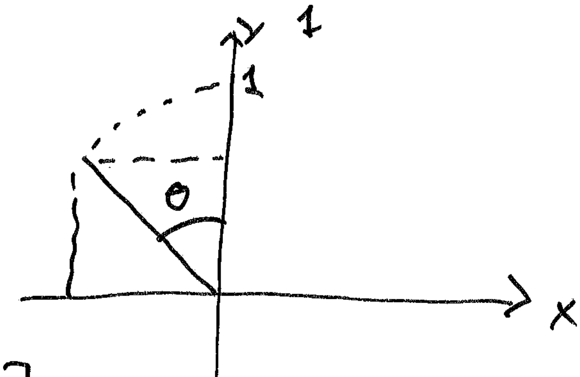
$T_{\theta=0^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ identiteten.

$T_{\theta_2} \circ T_{\theta_1} = T_{\theta_1+\theta_2}$

$T_\theta(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$



$T_\theta(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$



$$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

$T_{(\theta=0^\circ)} = 1_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $T_{\theta=90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

sjekk at $T_{\theta_2} \circ T_{\theta_1} = T_{\theta_1+\theta_2}$