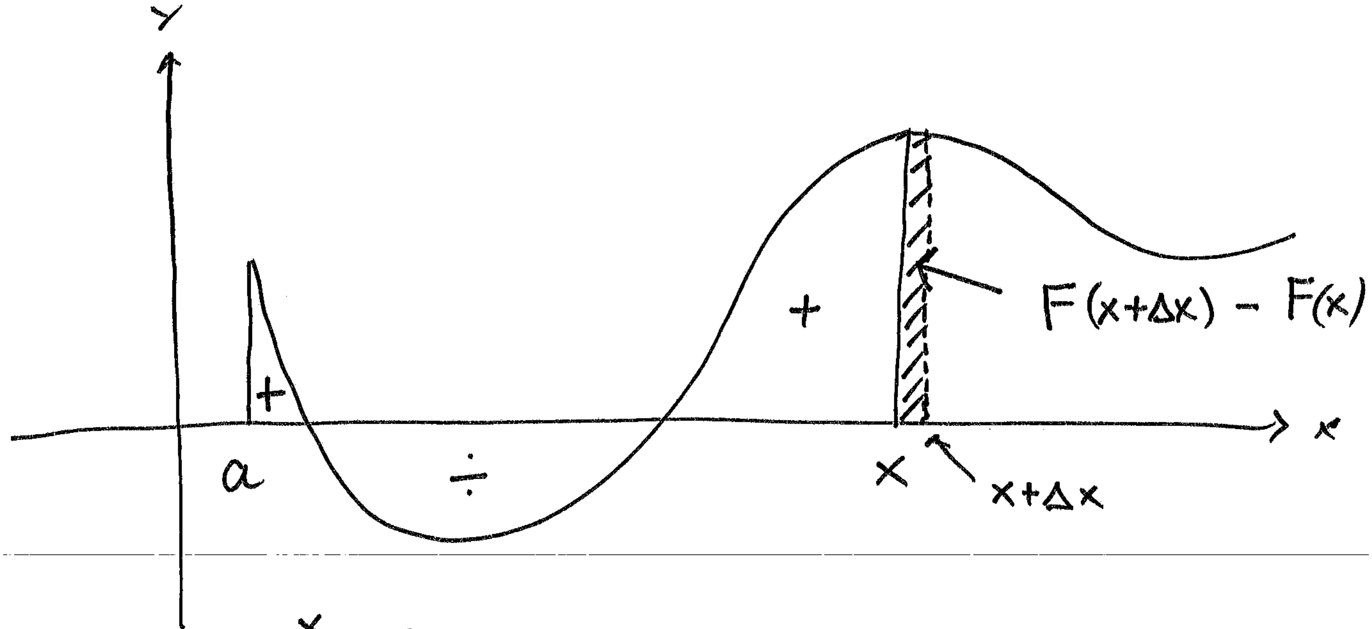
08 oktober
2015

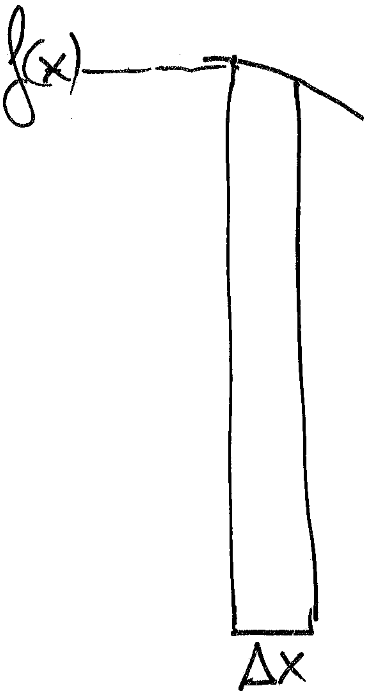
Fundamental teoremet i kalkulus.

1



$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Resultat: Anta $f(x)$ er kontinuerlig.
Da er $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$



$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \text{gjennomsnitts-høyde.}$$

I grensen $\Delta x \to 0$

får vi $\frac{d}{dx} F(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$

$$= f(x)$$

2

En funksjon $F(x)$ slik at $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ kalles en <u>antiderivert</u> til $f(x)$

$f(x) = x^2$ $\quad$ $F(x) = \frac{x^3}{3}$ en antiderivert

$\left(\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2\right)$ $\quad$ $G(x) = \frac{x^3}{3} - 7$ — " —

Hvis F og G er antideriverte til $f(x)$,

da er $\frac{d}{dx}\left(F(x) - G(x)\right) = \frac{d}{dx}F(x) - \frac{d}{dx}G(x)$

$= f(x) - f(x) \equiv 0$

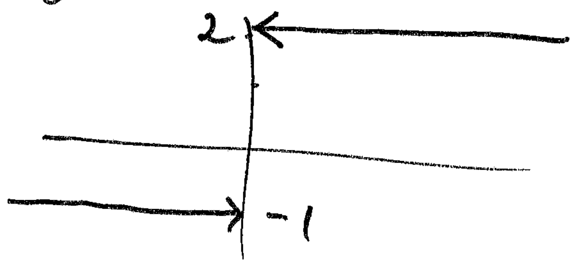
Så $F(x) - G(x)$ må være konstant på hver sammenhengende del av definisjonsmengden.

ex: $f(x) \equiv 0$ for alle $x \neq 0$

$D_f = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$

De antideriverte til $f(x)$ er

$$F(x) = \begin{cases} K_1 & x < 0 \\ K_2 & x > 0 \end{cases}$$



Antiderivert til x^r

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $\quad x \neq 0$

③ $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x > 0$

$$\frac{d \ln(-x)}{dx} = \frac{1}{(-x)} \cdot (-x)'$$
$$= \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} \quad x < 0$$

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Så $\ln|x|$ er en antiderivert til $\frac{1}{x}$.

Alle mulige antiderivert til $\frac{1}{x}$

er $\ln|x| + \begin{cases} k_1 & x < 0 \\ k_2 & x > 0 \end{cases}$

ofte skrives bare som: $\underline{\ln|x| + k}$

En antiderivert til x^r $\quad r \neq -1$

er $\frac{x^{r+1}}{r+1}$

Dette er slik ford: $\frac{d}{dx} \frac{x^{r+1}}{r+1} = \frac{1}{r+1} (r+1) \cdot x^{r+1-1}$
$= x^r$ ✓

Ubestemte integral

4

$$\int f(x)\,dx = \text{samlingen av alle antiderivert til } f(x)$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$ (en C for $x<0$ og en annen for $x>0$)

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}\cdot x^{r+1} + C \qquad r \neq -1$$ (— " — $r<0$)

$$\int x^{17}\,dx = \frac{x^{18}}{18} + C$$

$$\int x^{-17}\,dx = \frac{x^{-16}}{-16} + C$$

$$\int \underbrace{x^0}_{1}\,dx = x + C$$

—

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin x + C$$

—

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

5 $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$

$$\int \ln|x|\,dx = x\ln|x| - x + C$$

(siden $(x\ln(x))' = 1\cdot\ln|x| + \underbrace{x\cdot\frac{1}{x}}_{1}$)

$$\int_1^3 x^2\,dx$$

$F(x) = \displaystyle\int_1^x t^2\,dt$ er en antiderivert til x^2

$\displaystyle\int_1^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} + C$ for en C.

(siden alle antideriverte til x^2 er på denne formen.)

$F(1) = \displaystyle\int_1^1 t^2\,dt = 0$

så C må være slik at

$\displaystyle\frac{(+1)^3}{3} + C = 0$, $C = \displaystyle\frac{-1}{3}$.

$$\int_1^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$$

setter $x = 3$: $\displaystyle\int_1^3 t^2\,dt = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = 3^2 - \frac{1}{3} = \underline{\underline{9 - \frac{1}{3}}}$

$= \displaystyle\frac{26}{3}$

Generelt

(6) $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$
hvor $F(x)$ er én antiderivert for $f(x)$.

Forklaring: Ved fundamentalteoremet:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c$$
for en passende c.

Setter $x = a$ for å bestemme c:

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 = F(a) + c$$
så $c = -F(a)$

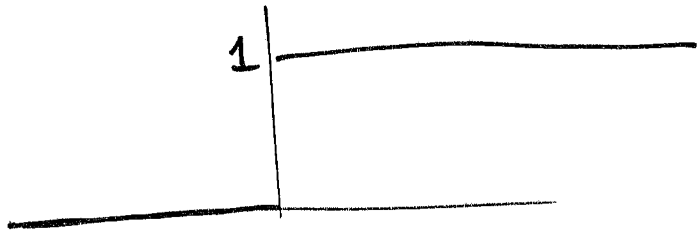
Derfor er $$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$
setter vi $x = b$ får vi resultatet.

<u>Resultat</u>: Alle kontinuerlige funksjoner har en antiderivert.

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{\text{er en antiderivert.}} = f(t) \qquad f \text{ kont.}$$

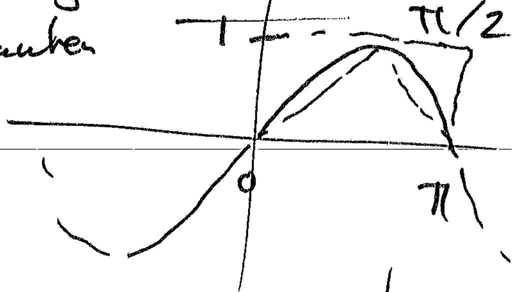
Ikkje alle funksjoner har en antiderivert.

7 steg-funksjonen $\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ har ikkje en antiderivert



Rektangelet har areal π

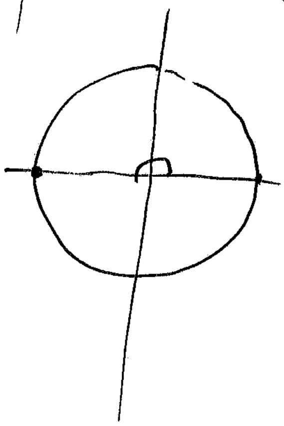
Trekanten



$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} - (-\underbrace{\cos(0)}_{1})$$



$$= 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + 7x - 1)\, dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - 2\left(\frac{x^3}{3}\right) + 7\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right) - (x) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{7}{2} - 1 = \frac{1}{4} + \frac{14}{4} - \frac{2}{3} - 1$$

$$= \frac{15}{4} - \frac{2}{3} - 1 = \frac{45 - 8 - 12}{12} = \underline{\underline{\frac{25}{12}}} \quad \left(= 2 + \frac{1}{12}\right)$$

Linear substitusjon.

Anta $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$.

(8) Da er $\frac{1}{a}F(ax+b)$ en antiderivert til $f(ax+b)$.

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{a}F(ax+b) = \frac{1}{a}f(ax+b)\cdot\underbrace{(ax+b)'}_{a}$$
$$= f(ax+b)$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

$$\int \sin(3x-7)\,dx = \frac{1}{3}\cdot\left(-\cos(3x-7)\right) + C$$
$$= -\frac{1}{3}\cos(3x-7) + C$$

$$\int \underbrace{(2x-13)^{15}}_{f(2x-13)}\,dx$$ hvor $f(u) = u^{15}$

$F(u) = \frac{u^{16}}{16} + C$

$$\int (2x-13)^{15}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-13)^{16}}{16} + C$$
$$= \frac{(2x-13)^{16}}{32} + C$$

(Mye lettere enn å gange ut $(2x-13)^{15}$ ...)

9 $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(u)\,du$ hvor $u = ax+b$.

Mer generelt: <u>substitusjon.</u>

Kjerneregelen $\displaystyle\frac{d}{dx}F(u(x)) = \frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$$= F'(u)\cdot u'(x)$$

La $F(x)$ være en antiderivert til $f(x)$:

Da gir kerneregelen $\displaystyle\frac{d}{dx}F(u(x)) = f(u(x))\cdot u'(x)$

Så $F(u(x))$ er en antiderivert til $f(u(x))u'(x)$

SUBSTITUSJON

$$\boxed{\begin{aligned}\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx &= F(u(x)) + C \\ &= \int f(u)\,du\end{aligned}}$$

$$\int \underbrace{2x}_{u'}\sin(\underbrace{x^2-4}_{u})\,dx$$

$u = x^2-4$
$u' = 2x$

$$= \int \sin(u)\,du = -\cos(u) + c$$

$$= \underline{-\cos(x^2-4) + c}$$

$$u = x^3 - 1$$
$$u' = 3x^2$$

(10)

$$\int x^2 \underbrace{(x^3-1)^5}\, dx$$
$$= \int \frac{u'}{3} \cdot u^5 \, dx$$
$$= \int \frac{1}{3} \cdot u^5 \, du$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^6}{6} + C$$
$$= \frac{(x^3-1)^6}{18} + C$$