

Prøve i Matte 1000 ELFE KJFE MAFE 1000
Dato: 02. desember 2015
Hjelpemiddel: Kalkulator og formelark

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver har lik vekt.

Oppgave 1

Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Regn ut, om mulig, summen $A+B^T$, produktet BA og determinanten $\det(A)$.

Oppgave 2

Vi har fått i oppdrag å uttrykke en søylevektor \mathbf{v}_4 som en lineær kombinasjon av tre søylevektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og \mathbf{v}_3 . Vi får oppgitt at matrisen

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$$

på redusert trappeform er lik

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Uttrykk \mathbf{v}_4 som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og \mathbf{v}_3 .

Oppgave 3

En lineær transformasjon fra \mathbb{R}^2 til seg selv er gitt ved speiling om linjen $y = x$. Bestem standardmatrisen til denne lineære transformasjonen.

Oppgave 4

Finn løsningene til følgende likningssystem for alle verdier av parameteren a .

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 5

Regn ut den eksakte verdien til de bestemte integralene som eksisterer. Hvis noen av integralene ikke eksisterer forklar hvorfor.

a) $\int_1^2 \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}} + \sqrt{4-2x} \, dx$

b) $\int_0^1 |\cos(\pi x)| \, dx$

c) $\int_{-2}^2 \frac{4}{x^4} \, dx$

Oppgave 6

Vi skal estimere nullpunkt til fjerdegradspolynommet

$$p(x) = x^4 - 5x + 3$$

- Forklar hvorfor $p(x)$ har akkurat ett nullpunkt i intervallet $[0, 1]$.
- Benytt Newtons metode til å finne en tilnærmet verdi for dette nullpunktet i $[0, 1]$. La startverdien være 1 og utfør to iterasjoner.

Oppgave 7

Bestem parametrene a og b slik at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x - a & x < 1 \\ b/x & x \geq 1 \end{cases}$$

er deriverbar for alle x .

Oppgave 8

Vi lager en beholder med høyde 8 dm ved å rotere grafen til $y(x) = x^3$ (enheter desimeter), for x mellom 0 og 2 dm, om y -aksen.

- Vis at volumet til beholderen er $96\pi/5 \text{ dm}^3$.
- Beholderen fylles med vann. Vanntilførselen er konstant og det tar 2 minutter å fylle beholderen. Bestem endringsraten (i desimeter per minutt) til høyden til vannstanden y når den er 1 dm.

Oppgave 9

Hva estimeres hvis vi kjører det ukommenterte skriptet nedenfor i matlab?
Forklar hvorfor nøyaktigheten til estimatet er omtrent 10^{-9} .

```
1 f=@(x) 3*x-x^2+sin(x)+1;
2 a=-1;
3 b=3;
4 N=30;
5 for n=1:N
6     c=(a+b)/2;
7     if f(c) * f(a) > 0
8         a=c ;
9     else b=c;
10    end
11 end
12 (a+b)/2
```

Oppgave 10

Benytt numerisk integrasjon til å estimere det bestemte integralet

$$\int_1^3 \frac{\sin x}{x} dx$$

Du kan enten benytte Simpsons metode med ett (dobbelt) delintervall eller trapesmetoden med fire delintervaller. Her er en tabell med noen funksjonsverdier.

x	1	1.5	2	2.5	3
$\sin(x)/x$	0.84147	0.66499	0.45464	0.23938	0.04704

Oppgave 11

Finn Taylorpolynomet om $x = 0$ til funksjonen

$$f(x) = 3 \sin(2x)$$

til og med grad 4.

Oppgave 12

a) Løs den lineære likningen

$$i + (1 - i)z = 2z + 1$$

med hensyn på z . Skriv løsningen på polarform, $re^{i\theta}$.

b) Regn ut nullpunktene til polynomet

$$2z^3 + 8z^2 + 10z$$

Faktoriser polynomet som et produkt av lineære faktorer.

Oppgave 13

En beholder fylt med varmt vann, blir plassert på et bord. Opprinnelig er temperaturen $T_1 = 80$ °C. Etter en hel time er temperaturen blitt 40 °C. Temperaturen i rommet er $T_0 = 20$ °C. Anta at Newtons avkjølingslov

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$$

beskriver nedkjølingen.

a) Vis at temperaturen til vannet som en funksjon av tiden er gitt ved

$$T(t) = (1 + 3e^{-kt}) \cdot 20 \text{ °C}$$

b) Regn ut hvor lang tid det tar før temperaturen i vannet synker fra 40 °C til 30 °C.

Oppgave 14

Finn alle løsningene til differensiallikningen

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = e^{-2x}.$$