LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I MATEMATIKK 1000, .08.2011

Oppgave 1 :

a) $p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -5 \\ -4 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) - 20 = \lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0$

$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2}$

A har egenverdiene $\lambda = 6$ og $\lambda = -3$.

$\underline{\lambda = 6}$:

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x - y = 0 \;\; , \;\; y = x$

$x = t$
$y = t$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\; , \;\; t \neq 0$$

$\underline{\lambda = -3}$:

$$\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-4x - 5y = 0 \;\; , \;\; y = -\frac{4}{5}x$

$x = 5t$
$y = -4t$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \;\; , \;\; t \neq 0$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \;\; , \;\; D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

b) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

La $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = P^{-1}AP\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6u \\ -3v \end{bmatrix}$$

$u = c_1\, e^{6t}$
$v = c_2\, e^{-3t}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = c_1\, e^{6t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{-3t}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$x = c_1\, e^{6t} + 5\, c_2\, e^{-3t}$
$y = c_1\, e^{6t} - 4\, c_2\, e^{-3t}$

Oppgave 2 :

a) i) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin x}{x} = \sin 1$

ii) $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0$

b) i) $y' = 2x \cdot \cos(x^2) - x^2 \cdot 2x \sin(x^2) = 2x\cos(x^2) - 2x^3 \sin(x^2)$

ii) $2y^3 + x^2y^2 + x = 0$

Implisitt derivasjon gir

$6y^2\, y' + 2x \cdot y^2 + x^2 \cdot 2y\, y' + 1 = 0$

$(6y^2 + 2x^2y)\, y' = -(2xy^2 + 1)$

$y' = -\frac{2xy^2+1}{6y^2+2x^2y}$

c) $f(x) = e^{-x} - x$ er kontinuerlig i $[0,1]$.

$f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$, $f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

Ifølge skjæringssetningen har f minst ett nullpunkt i $(0,1)$.

$f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ for $x \in (0,1)$.

f er derfor strengt avtagende og har nøyaktig ett nullpunkt i $[0,1]$.

Newtons metode med $x_0 = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n}{-e^{-x_n} - 1} = \frac{x_n(e^{-x_n}+1) + (e^{-x_n} - x_n)}{e^{-x_n}+1} = \frac{(x_n+1)\,e^{-x_n}}{e^{-x_n}+1}$$

$$x_0 = 0\ ,\quad x_1 = \tfrac{1}{2}\ ,\quad x_2 = \frac{(3/2)\,e^{-1/2}}{e^{-1/2}+1} = \frac{3}{2\,(1+\sqrt{e}\,)}\ .$$

<u>Oppgave 3</u> :

La y være lengden av fiskesnøret fra tuppen av fiskestangen og ut til sluket mens det trekkes inn, og la x være avstanden fra sluket inn til land. Da er

$y = \sqrt{x^2 + 9}$

Vi deriverer med hensyn på tiden t.

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\frac{dx}{dt}$

Når $y = 5$ og $\frac{dy}{dt} = -\frac{2}{5}$, er $x = \sqrt{y^2 - 9} = 4$ og

$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\frac{dy}{dt} = -\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} = -\frac{1}{2}$

Sluket nærmer seg land med en hastighet på 1/2 m/s.

<u>Oppgave 4</u> :

a) $S\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$, $S\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ og $S\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

gir at $A = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\5\\1\end{bmatrix}$ og $T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\0\\-3\end{bmatrix}$

gir at $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

b) Matrisen til transformasjonen ST er

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} .$$

Matrisen til transformasjonen TS er

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} .$$

c) Alle vektorer $v \neq 0$ i yz-planet ligger i ro når vi bruker S. De er derfor egenvektorer med egenverdi 1 .

$$\lambda = 1 : \; v = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{hvor } s \text{ og } t \text{ ikke begge er } 0 .$$

Alle vektorer $v \neq 0$ langs x-aksen blir motsatte når vi bruker S. De er derfor egenvektorer med egenverdi -1 .

$$\lambda = -1 : \; v = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{hvor } t \neq 0.$$

Kontroll :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ t \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 5 :

a) i) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^2 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$

$u = x^2+1\ ,\ du = 2xdx$

ii) $\int \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du + \arctan x$

$u = x^2+1\ ,\ du = 2xdx$

$$\begin{array}{l} (x^3+1) : (x^2+1) = x \\ \underline{x^3+x} \\ \quad -x+1 \end{array}$$

$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln|u| + \arctan x + C = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C$

b) $A = \int_0^1 [f(x)-g(x)]\,dx = \int_0^1 (1-x^3)\,dx = \left[x - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$V = \int_0^1 \pi[f(x)^2 - g(x)^2]\,dx = \pi\int_0^1 (1-x^6)\,dx = \pi\left[x - \frac{1}{7}x^7\right]_0^1$

$= \pi\left(1-\frac{1}{7}\right) = \frac{6\pi}{7}$

Oppgave 6 :

a) $\frac{y'}{x^2+1} + \frac{1}{\sin y} = 0$

$\frac{y'}{x^2+1} = -\frac{1}{\sin y}$

$-\int \sin y\,dy = \int (x^2+1)\,dx$

$\cos y = \frac{1}{3}x^3 + x + C$

Hvis løsningen skal gå gjennom punktet $(0, \frac{\pi}{2})$, må

$C = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

Løsning av initialverdiproblemet :

$y = \arccos(\frac{1}{3}x^3 + x)$

b) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ (1)

Tilhørende homogene likning :

$y'' + 2y' + y = 0 \qquad (2)$

Karakteristisk likning :

$r^2 + 2r + 1 = 0$

$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$

$(r+1)^2 = 0$

$r = -1$ er dobbeltrot.

Generell løsning av (2) :

$y_h = (c_1 + c_2\,x)\,e^{-x}$

$y_p = Ax^2e^{-x}$

$y_p' = A(2x - x^2)e^{-x}$

$y_p'' = A(2-2x)e^{-x} - A(2x-x^2)e^{-x} = A(2-4x+x^2)e^{-x}$

Vi setter inn i differensiallikningen (1) :

$A(2-4x+x^2)e^{-x} + 2A(2x-x^2)e^{-x} + Ax^2e^{-x} = e^{-x}$

$2Ae^{-x} = e^{-x}$, $A = \frac{1}{2}$

$y_p = \frac{1}{2}\,x^2e^{-x}$

Generell løsning av (1) :

$y = (c_1 + c_2\,x + \frac{1}{2}x^2)\,e^{-x}$

$y' = (c_2 + x)\,e^{-x} - (c_1 + c_2\,x + \frac{1}{2}x^2)\,e^{-x} = (c_2 - c_1 + x - c_2\,x - \frac{1}{2}x^2)\,e^{-x}$

$y(0) = c_1 = 1$, $c_1 = 1$

$y'(0) = c_2 - c_1 = 1$, $c_2 = 1 + c_1 = 2$

Løsning av initialverdiproblemet :

$y = (1 + 2\,x + \frac{1}{2}x^2)\,e^{-x}$

Oppgave 7 :

a) $2B = 2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 12 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 9 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$B^2 + A^3$ er ikke definert.

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -9 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -9 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 4 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{ll} & \\ & \\ -2 & -2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 1 & 0 & 8 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & a+3 \\ 3 & a & -(a+4) \\ 1 & 1 & a+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & a & -(a+4) \\ 1 & 1 & a+3 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & -(a+4) \\ 1 & a+3 \end{vmatrix}$$

$$= a[a(a+3)+(a+4)] = a(a^2+4a+4) = a(a+2)^2$$

Eksakt en løsning når $a \neq 0$ og $a \neq -2$.

<u>$a = 0$</u> :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 \quad -1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -13 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ingen løsning når $a = 0$.

<u>$a = -2$</u> :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 \quad 1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{1}{5} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ -1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uendelig mange løsninger når $a = -2$.

$$\begin{aligned} x \qquad\qquad &= -1 \\ y + z &= -2 \end{aligned}$$

$x = -1$

$y = -2 - z$

$x = -1$
$y = -2 - t$
$z = t$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$x = -2$, $y = 11$, $z = -6$.