Oblig 2
Forkurs 1120

20.10.2022

1.1 $\frac{4}{x+1} - 2 > \frac{2}{3}$

"spørsmål om fortegn"

$\Leftrightarrow \frac{4}{x+1} - 2\cdot\frac{3}{3} - \frac{2}{3} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{4}{x+1} - \frac{8}{3} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{4\cdot 3 - 8(x+1)}{3(x+1)} > 0$

ett rasjonalt uttrykk

$\Leftrightarrow \frac{(12-8) - 8x}{3(x+1)} > 0$

$R(x) = \frac{4(1-2x)}{3(x+1)} > 0$

Forte<u>gnsskj</u>ema

		-1		$\frac{1}{2}$	
$4(1-2x)$	———	———	———	0	- - - - -
$\frac{1}{3}(x+1)$	- - - - -	x	———	———	———
$R(x)$	- - - - -	x	———	0	- - - -

Løs<u>ning</u> er derfor

$\underline{x \in \langle -1, \frac{1}{2} \rangle}$

1.2

$$R(x): \frac{x^3-2x-1}{x^3+x^2-2x-2} \geq 0$$

$x=-1$ er en rot til begge uttrykkene.

Derfor er $x+1$ en faktor i begge.

Faktorisere og forkorter

$$R(x) = \frac{(x+1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x^2-2)} = \frac{x^2-x-1}{x^2-2} \geq 0$$

og $x \neq -1$.

Røtter til x^2-x-1 er:

$$\frac{+1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$

$r_2 = -0.618$

Røtter til x^2-2 er $\pm\sqrt{2}$.

Vi får faktoriseringen:

$$R(x) = \frac{(x-r_1)(x-r_2)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} \geq 0$$

og $x \neq -1$

Fortegnslinjene

		$-\sqrt{2}$		-1		r_2		$\sqrt{2}$		r_1	
$(x-r_1)$	- - -		- - -		- - -		- - -		- - -	0	———
$(x-r_2)$	- - -		- - -		- - -	0	———		———		———
$1/(x-\sqrt{2})$	- - -		- - -		- - -		- - -	x	———		———
$1/(x+\sqrt{2})$	- - -	x	———		———		———		———		———
$R(x)$	———	x	- - -		- - -	0	———	x	- - -	0	———

ikke $x=-1$ x ikke -1

Vi leser nå av løsningene

$$x \in \langle -\infty, -\sqrt{2} \rangle \cup \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \sqrt{2} \right\rangle \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty \right\rangle$$

1.3 $$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)+(x-1)}{(x-1)(x+2)} - 2 \leq 0$$

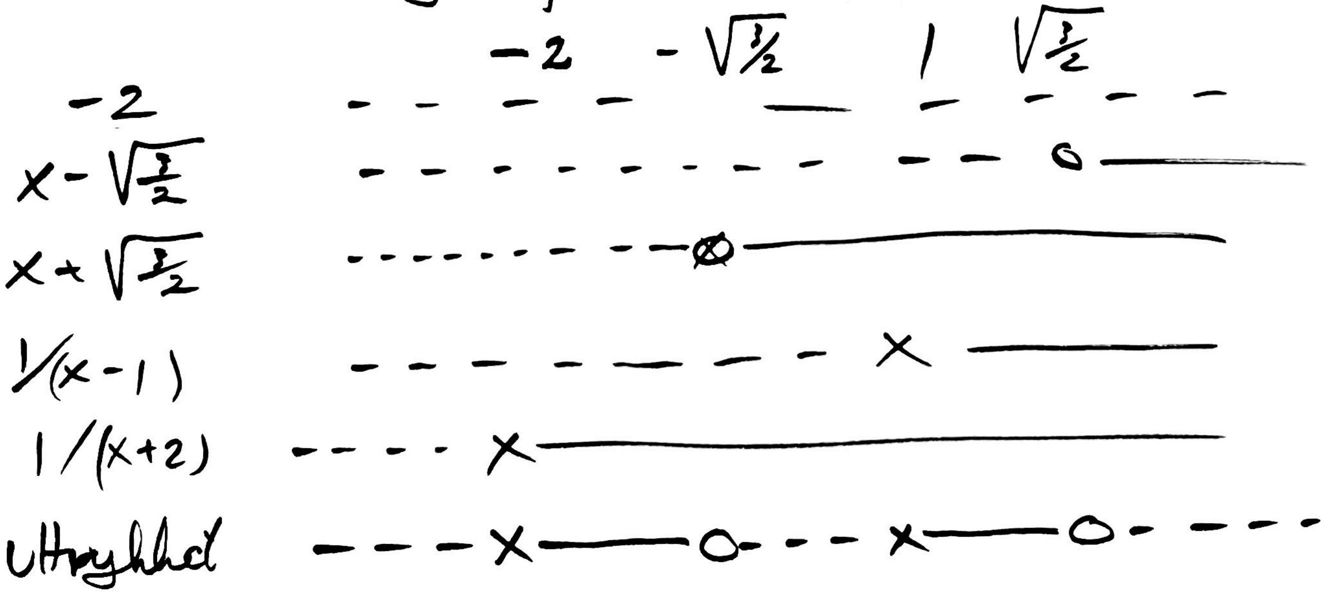
$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} - \frac{2(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+1) - 2(x^2+x-2)}{(x-1)(x+2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2+3}{(x-1)(x+2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(x^2-3/2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{-2\left(x-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\left(x+\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)}{(x-1)(x+2)} \leq 0$$

$\Leftrightarrow$ Fortegnsskjema



Løsningen er $x \in \left\langle -2, -\sqrt{\tfrac{3}{2}} \right] \cup \left\langle 1, \sqrt{\tfrac{3}{2}} \right]$

1.4 $10 - x < x^2 + 2x$ L1

og $x^2 + 2x \leq 3x^2 - 12$ L2

L1: $x^2 + 3x - 10 > 0$

$(x+5)(x-2) > 0$

Løsningene er $\langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$

L2 $x^2 + 2x \leq 3x^2 - 12$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq 2x^2 - 2x - 12$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq 2(x^2 - x - 6)$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq 2(x-3)(x+2)$

Løsningene er $\langle -\infty, -2] \cup [3, \infty \rangle$

Felles løsningen til begge ulikhetene er: $\underline{\langle -\infty, -5 \rangle \cup [3, \infty \rangle}$

2.1 $\sqrt[4]{x+3} = 3$

$\Leftrightarrow \quad x+3 = 3^4 = 81$

$\Leftrightarrow \quad x = 81-3 = \underline{78}$

2.2. $\sqrt{5-x} = x+1$

implierer $\Rightarrow \quad 5-x = (x+1)^2 = x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow \quad x^2+3x-4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x+4)(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x=-4$ og $x=1$.

sjekker for "falske løsninger":

$x=-4$: VS : $\sqrt{5-(-4)} = \sqrt{9} = 3$
HS : $-4+1 = -3$
Venstre og høyre side er ikkje like : Falsk løsning.

$x=1$: $\left.\begin{array}{l}\sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2 \\ x+1 = 1+1 = 2\end{array}\right\}$ venstre og høyre side er like i likningen

Løsningen er $x=\underline{1}$

2.3. $\sqrt{4-x} = 2-\sqrt{x}$ kvadrerer begge sider

$\Rightarrow \quad 4-x = (2-\sqrt{x})^2 = 4+x-4\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \quad 2x = 4\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\sqrt{x}$

kvadrerer igjen

$x^2 = 4x$

$\Leftrightarrow \quad x^2-4x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-4)=0$

så $\underline{x=0}$ og $\underline{x=4}$

Sjekker løsningene og ser at begge faktisk er løsninger til den opprinnelige likningen

Løsningene er $\underline{x = 0 \text{ og } 4}$

2.4 $\sqrt{3x} = \sqrt[3]{x}$ opphøyer i 6-te potens

Vi må ha $x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (3x)^3 = x^2$

$27x^3 = x^2$

så $x=0$ eller $27x=1$

Løsningene er $\underline{x=0}$ og $\underline{x=\frac{1}{27}}$

3. $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ for alle $a > 0$
og vi har likhet for $a = 1$.

Her er en måte å se dette på:

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \iff a + \frac{1}{a} - 2 \geqslant 0$$

finner "felles nevner"

$$\iff \frac{a^2 - 2a + 1}{a} \geqslant 0 \iff \frac{(a-1)^2}{a} \geqslant 0$$

Dette er sant for alle $a > 0$.
Vi har og ekvivalens mellom likhet i de forskjellige ulikhete ovenfor. siden $(a-1)^2 = 0$ bare for $a = 1$

Viser dette at $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ for alle a positive og
vi har likhet for $a = 1$ sant $a + \frac{1}{a} > 2$ for $0 < a \neq 1$

4 $\quad p(x) = x^4 + bx^3 + x^2 + 4$

Dette er en parametrisert familie
av polynomer. Et polynom for hver $b \in \mathbb{R}$.

$x-2$ er en faktor i $p(x) \iff$
$p(2) = 0$ (resten under pol. div med
$x-2$ er $p(2)$)

$$p(2) = 2^4 + b \cdot 2^3 + 2^2 + 4$$
$$= 16 + 8b + 4 + 4$$
$$= 16 + 8 + 8b = 24 + 8b$$
$$= 8(3+b) = 0$$

$x-2$ deler $p(x)$ når $b = -3$.

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4.$$

Deler ut $x-2$:

$$
\begin{array}{l}
x^4 - 3x^3 + x^2 \quad + 4 : x-2 = x^3 - x^2 - x - 2 \\
\underline{x^4 - 2x^3} \\
\quad -x^3 + x^2 \qquad 4 \\
\quad \underline{-x^3 + 2x^2} \\
\qquad -x^2 \qquad 4 \\
\qquad \underline{-x^2 + 2x} \\
\qquad\quad -2x - 4 \\
\qquad\quad \underline{-2x - 4} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

2 er en rot til $x^3 - x^2 - x - 2$
siden $8 - 4 - 2 - 2 = 0$

Vi deler ut en faktor til med $x-2$:

$$x^3 - x^2 - x - 2 : x - 2 = x^2 + x + 1$$

irredusibel

$$\begin{array}{l} x^3 - 2x^2 \\ \hline x^2 - x - 2 \\ x^2 - 2x \\ \hline x - 2 \\ x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$b=-3$

$$P(x) = \underline{(x-1)^2 (x^2+x+1)}$$

5.

$$a'(x) = (x^5)' = \underline{5x^4}$$

$$b'(x) = (4x^9)' = 4(x^9)' = \underline{36x^8}$$

$$c'(x) = (-x^5 + 2x^4 + 5x^2 - 13)'$$
$$= \underline{-5x^4 + 8x^3 + 10x}$$

$$d'(x) = \left(\frac{4x^6}{3} + \frac{-4x^7}{x^3} + \frac{2-3x}{5} + \frac{3}{4}\right)'$$
$$= \frac{4}{3}(x^6)' - 4(x^4)' + \left(\frac{2}{5}\right)' - \frac{3}{5}(x)' + \left(\frac{3}{4}\right)'$$
$$= \frac{24}{3}x^5 - 4 \cdot 4x^3 + 0 - \frac{3}{5} + 0$$
$$= \underline{8x^5 - 16x^3 - \frac{3}{5}}$$

ganget ut

5 e) $$(e(x))' = (x^8 + 2x^5 - 3x^3 - 6)'$$
$$= \underline{8x^7 + 10x^4 - 9x^2}$$

6 $$f'(x) = \left(7(3x-7)^4 - (2-x)^{11}\right)'$$
$$= 7\cdot 4\,(3x-7)^3\underbrace{(3x-7)'}_{3} - 11(2-x)^{10}\underbrace{(2-x)'}_{-1}$$

$$f'(x) = 3\cdot 28(3x-7)^3 - (-1)\,11\,(2-x)^{10}$$
$$= \underline{84(3x-7)^3 + 11(2-x)^{10}}$$

$$g'(x) = \left((5-x)^{-1} + (5-x)^{1/2} + \sqrt{4}\sqrt{1+2x}\right)'$$
$$= \frac{-1}{(5-x)^2}(5-x)' + \frac{1}{2}(5-x)^{-1/2}(5-x)'$$
$$+ 2\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+2x}}(1+2x)'$$
$$= \underline{\frac{1}{5-x} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} + \frac{2}{\sqrt{1+2x}}}$$

6 $h'(x) = \Big(\overbrace{x^3 - x + 3}^{\text{delt ut}} + \sqrt{1-x} + 3\overbrace{\sqrt[3]{9+4x}}^{(9+4x)^{1/3}} \Big)'$

$= 3x^2 - 1 + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}(1-x)' + 3\,\frac{1}{3}(9+4x)^{-2/3}(9+4x)'$

$= \underline{3x^2 - 1 + \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{4}{\sqrt[3]{(9+4x)^2}}}$

$i(x) = \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x-2}$

"telleren" er delelig med $x-2$ siden

$2^4 - 3 \cdot 2^2 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0.$

Vi utfører pol. div før vi deriverer.

$$
\begin{array}{l}
x^4 \quad -3x^2 \quad -4 : x-2 = \underline{x^3 + 2x^2 - x + 2} \\
\underline{x^4 - 2x^3} \\
\quad 2x^3 - 3x^2 \quad -4 \\
\quad \underline{2x^3 - 4x^2} \\
\qquad +x^2 \quad -4 \\
\qquad \underline{+x^2 - 2x} \\
\qquad\quad +2x - 4 \\
\qquad\quad \underline{2x - 4} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Alternativt: $x^4 - 3x^2 - 4 \overset{\text{2.grads pol. i } x^2}{=} (x^2-4)(x^2+1)$

$= (x+2)(x-2)(x+1)(x-1).$

$i'(x) = (x^3 + 2x^2 - x + 2)'$

$= \underline{3x^2 + 4x - 1}$

7. $j(x) = x^4 + 2x$

$j'(x) = 4x^3 + 2$

$(-2, 12)$ ligger på grafen fordi $j(-2) = 16 - 4 = 12$.

Stigningstallet til tangentlinjen i $(-2, 12)$ er lik $j'(-2) = 4(-2)^3 + 2 = -30$.

Normallinjen har da stigningstall $\frac{-1}{-30} = \frac{1}{30}$.

Tangentlinjen er $y = -30(x-(-2)) + 12$

$$\underline{y = -30x - 48}$$

Normallinjen er $y = \frac{1}{30}(x-(-2)) + 12$

$$\underline{y = \frac{x}{30} + \frac{1}{15} + 12}$$

7 $k(x) = \sqrt{3+11x}$

$$k'(x) = \frac{11}{2\sqrt{3+11x}}$$

Punktet $(2,5)$ ligger på grafen til $k(x)$

siden $k(2) = \sqrt{3+11\cdot 2} = 5$

Stigningstallet til tangentlinjen til $k(x)$

i $(2,5)$ er lik $k'(2) = \frac{11}{2\cdot 5} = 1.1$.

Tangentlinjen i $(2,5)$ er lik

$$y = \frac{11}{10}(x-2) + 5 = \frac{11}{10}x - \frac{22}{10} + 5$$

$$\underline{y = 1.1x + 2.8}$$

Normallinjen i $(2,5)$ er lik

$$y = -\frac{10}{11}(x-2) + 5 = -\frac{10}{11}x + \frac{20}{11} + \frac{55}{11}$$

$$\underline{y = -\frac{10}{11}x + \frac{75}{11}}$$

8 $\quad f(a) = \frac{1}{a} + \frac{2}{10-a}, \quad 10 > a > 0$

$f(a)$ er minst når

$$f'(a) = 0.$$

Finner $f'(a)$ og løser likningen $f'(a) = 0$.

$$f'(a) = \left(a^{-1} + 2\cdot(10-a)^{-1}\right)'$$

$$= -a^{-2} - 2(10-a)^{-2}(10-a)'$$

$$= \frac{-1}{a^2} + \frac{2}{(10-a)^2}.$$

$$f'(a) = 0 \iff \frac{1}{a^2} = \frac{2}{(10-a)^2}$$

$$\iff a^2 = \frac{(10-a)^2}{2} \iff 2a^2 = (10-a)^2$$

$$\iff 2a^2 = a^2 - 20a + 100$$

$$\iff a^2 + 20a - 100 = 0$$

$$\iff a = \frac{-20 \pm \sqrt{(20)^2 + 4\cdot 100}}{2}$$

$$= -10 \pm \sqrt{200} = -10 \pm \sqrt{2}\cdot 10$$

Når $a > 0$ så er eneste løsning

$$a = 10(\sqrt{2} - 1) \sim \underline{4.1}$$

$f(x) \to \infty$ når $x \to 0^+$ og når $x \to 10^-$

$f(a)$ har derfor minimumspunkt (f deriverbar i $\langle 0, 10\rangle$)

for $a = 10(\sqrt{2} - 1) \sim \underline{\underline{4.1}}$

9. $l(x) = \sqrt{9-x}$

definert når $9 - x \geq 0$

$9 \geq x$

1. $D_l = \langle -\infty, 9]$

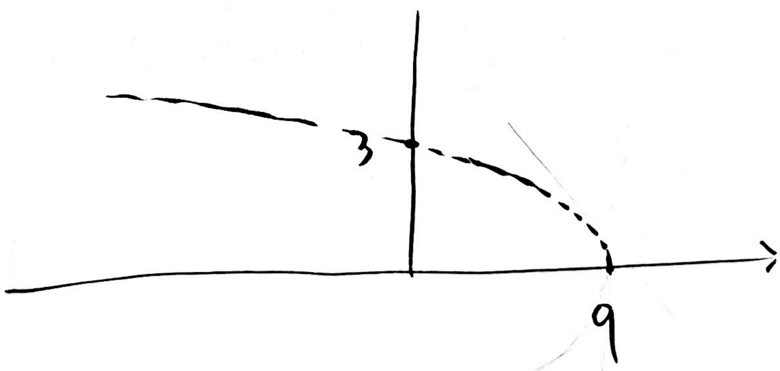
2,3. l er kontinuerlig i D_l

$l'(x) = \left((9-x)^{1/2}\right)'$

$= \frac{1}{2}(9-x)^{-1/2} \cdot \underbrace{(9-x)'}_{-1}$

$l'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{9-x}}$ $\quad x < 9.$

ikkje deriverbar i $x = 9.$



9 $m(x) = \frac{x^2}{x-2}$

polynomdivisjon $\quad x^2 : (x-2) = x + 2 + \frac{4}{x-2}$

$$\begin{array}{l} x^2 \\ \underline{x^2 - 2x} \\ \quad 2x \\ \quad \underline{2x - 4} \\ \qquad 4 \end{array}$$

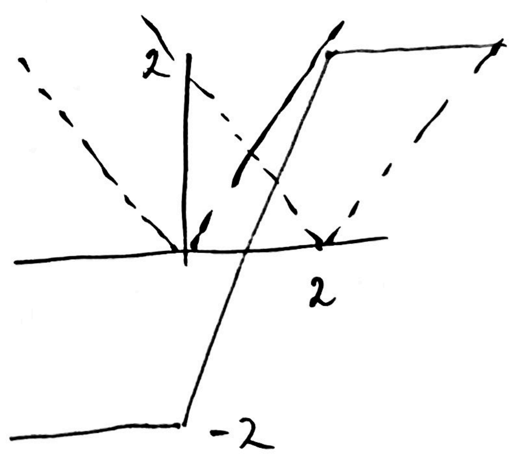
$m(x) = x + 2 + \frac{4}{x-2}$ $\quad$ 1. $D_m = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$= \langle -\infty, 2 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$.

$m'(x) = 1 + 4\left(\frac{-1}{(x-2)^2} \cdot 1\right) = 1 - \frac{4}{(x-2)^2}$

m er deriverbar for alle $x \in D_m$

2.3. $\quad$ og derfor også kontinuerlig i D_m



$n(x) = |x| - |x-2|$

$D_n = \mathbb{R}$

$n(x)$ er kontinuerlig.

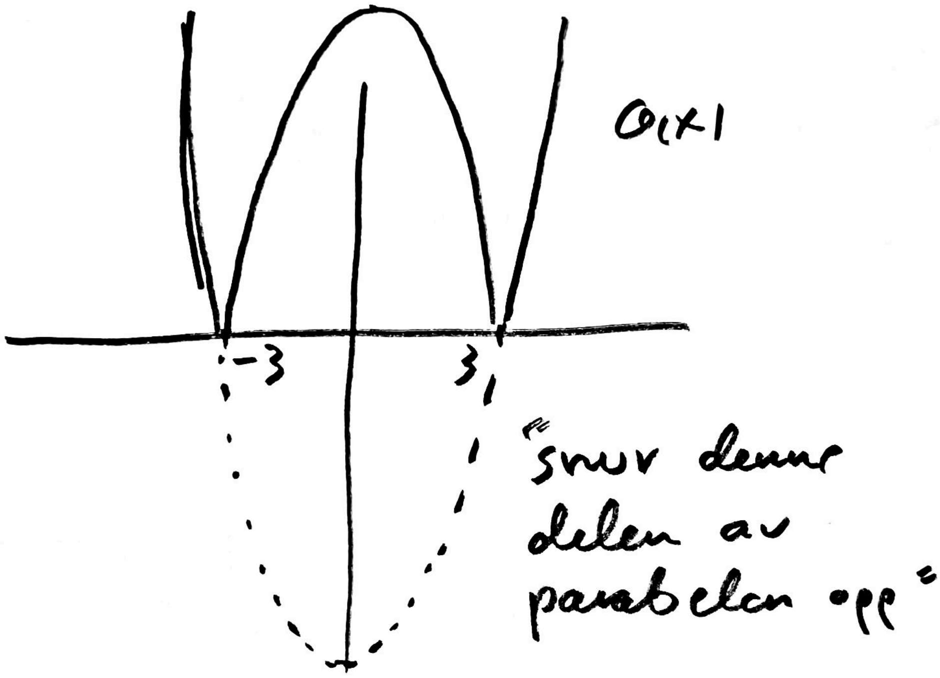
$n(x)$ er ikkje deriverbar

i $x = 0$ og 2

$$n'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2 & 0 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

9 $\Theta(x) = |x^2 - 9|$

$= |(x-3)(x+3)|$



1.2.3 $D_\Theta = \mathbb{R}$

$D_{\Theta'} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

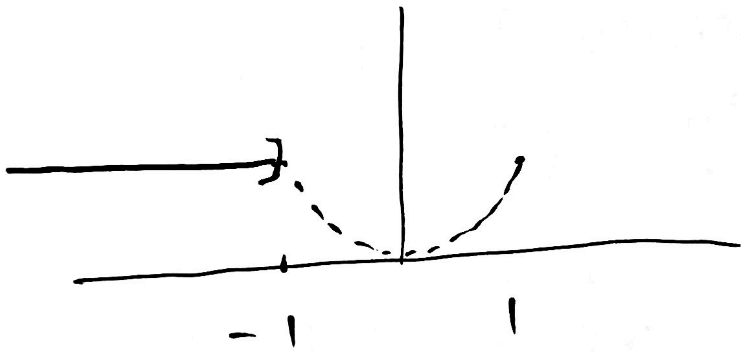
$$\Theta'(x) = \begin{cases} 2x & x < -3 \\ -2x & -3 < x < 3 \\ 2x & 3 < x \end{cases}$$

$\Theta(x)$ er kontinuerlig for alle x.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

1. $D_g = \mathbb{R}$

2.3 $$g'(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 2x & -1 < x < 1 \\ -2x + 4 & x > 1 \end{cases}$$



$\lim_{x \to -1} g(x) = 1 = g(1)$ kont.

$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1 = g(1)$

$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} -x^2 + 4x - 2 = -1 + 4 - 2 = 1$

kont i $x = 1$

2. $g(x)$ er kont. for alle x.

ikkje deriverbar i $x=-1$

$x=1$ $\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta q}{\Delta x} = 2x\big|_{x=1} = 2.$

(siden q er kont i $x=1$)

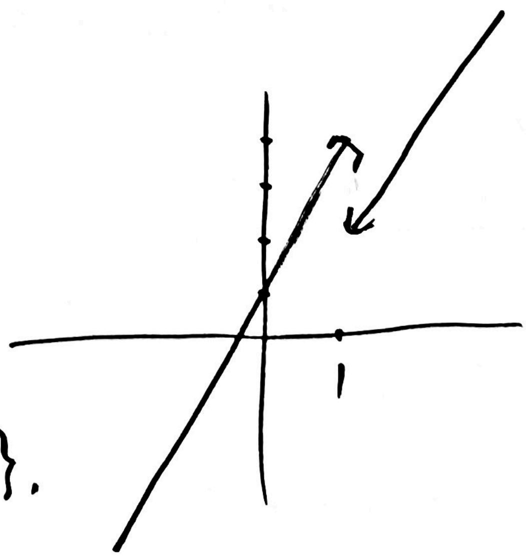
$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta q}{\Delta x} = -2x+4\big|_{x=1} = 4-2=2.$

$q(x)$ er deriverbar i $x=1$
og $q'(1)=2.$

3 $q'(x) = \begin{cases} 0 & x<-1 \\ 2x & -1<x<1 \\ -2x+4 & x\geq 1 \end{cases}$

ikkje deriverbar i $x=-1.$

$p(x) = \begin{cases} 3x+1 & x\leq 1 \\ 3x-1 & x>1 \end{cases}$



1. $D_p = \mathbb{R}$
2. Diskontinuitet i $x=1$
   Kontinuerlig i $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
3. $p'(x) = \begin{cases} 3 & x<1 \\ 3 & x>1 \end{cases}$ ikkje deriverbar i $x=1$.

10. $r(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & x < -1 \\ x^2 + b & x \geq -1 \end{cases}$

Finn a og b slik at r(x) blir deriverbar.

$r'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + b & x < -1 \\ 2x & x > -1 \end{cases}$

r(x) er kont. i $x = -1$ hvis

$$r(-1) = (-1)^2 + b = b + 1$$
$$= \lim_{x \to -1} r(x).$$

$$\lim_{x \to -1^+} r(x) = \lim_{x \to -1^+} x^2 + b = b + 1$$

$$\lim_{x \to -1^-} r(x) = \lim_{x \to -1^-} ax^3 + bx = -a - b$$

r(x) er kont i $x = -1 \iff \underline{b + 1 = -(a + b)}$

Når r(x) er kont: derivert fra venstre side av -1 er $3ax^2 + b \,\big|_{x=-1} = 3a + b$

derivert fra høyre side i $x = -1$

$$2x \,\big|_{-1} = -2$$

r(x) er deriverbar i $x = -1$ når $\underline{3a + b = -2.}$

$2b + 1 = -a$ likningssystem.

$3a + b = -2$

$a = -(2b+1)$ setter inn i L2:

$-3(2b+1) + b = -2 \quad | \cdot (-1)$

$3(2b+1) - b = 2$

$6b - b + 3 = 2$

$5b = -1$ så $b = \underline{\frac{-1}{5}}$

$a = -\left(1 + \frac{-2}{5}\right) = \underline{\frac{-3}{5}}$

11 $S(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 14$

Tangentlinjen til $S(x)$ i $(x, S(x))$
er parallell til $y = -24x - 13$

$\Leftrightarrow \quad S'(x) = -24.$

Vi løser likningen:

$$S'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 4 \cdot 3 \cdot x^2 - 12 \cdot 2x + 0$$
$$= 12x^3 - 12x^2 - 12 \cdot 2x$$
$$= 12(x^3 - x^2 - 2x)$$

$S'(x) = -24 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - x^2 - 2x = -2$

$\Leftrightarrow \quad x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$, ser at
$S'(1) = 0$ (siden $1 - 1 - 2 + 2 = 0$).

Pol.divisjon gir $(x-1)(x^2-2) = 0$

$\underline{x = 1 \text{ og } x = \pm\sqrt{2}}$

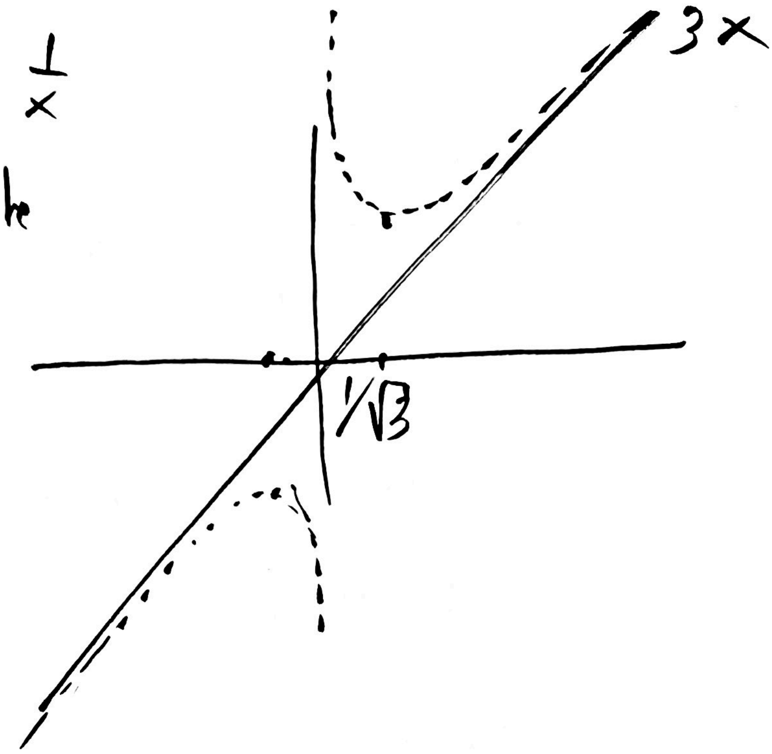
12. $t(x) = 3x + \frac{1}{x}$

Vertikal asymptote

$x = 0$

Skrå asymptote

$y = 3x$.



$t'(x) = 3 - \frac{1}{x^2} = \frac{3x^2 - 1}{x^2}$

$t'(x) = 0 \qquad x^2 = \frac{1}{3}, \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$.

$t''(x) = (-x^{-2})' = +2x^{-3} = \underline{\frac{+2}{x^3}}$

Bunnpunkt i $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 3/\sqrt{3} + \sqrt{3}\right)$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 2\sqrt{3}\right)$

Toppunkt i $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, -2\sqrt{3}\right)$

$t(x)$ stiger $\langle -\infty, \frac{-1}{\sqrt{3}} \rangle$ og i $\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty \rangle$

$t(x)$ synker $\langle \frac{-1}{\sqrt{3}}, 0 \rangle$ og i $\langle 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle$

12 $\quad u(x) = \dfrac{4x+3}{x+1} = \dfrac{4(x+1)-1}{x+1}$

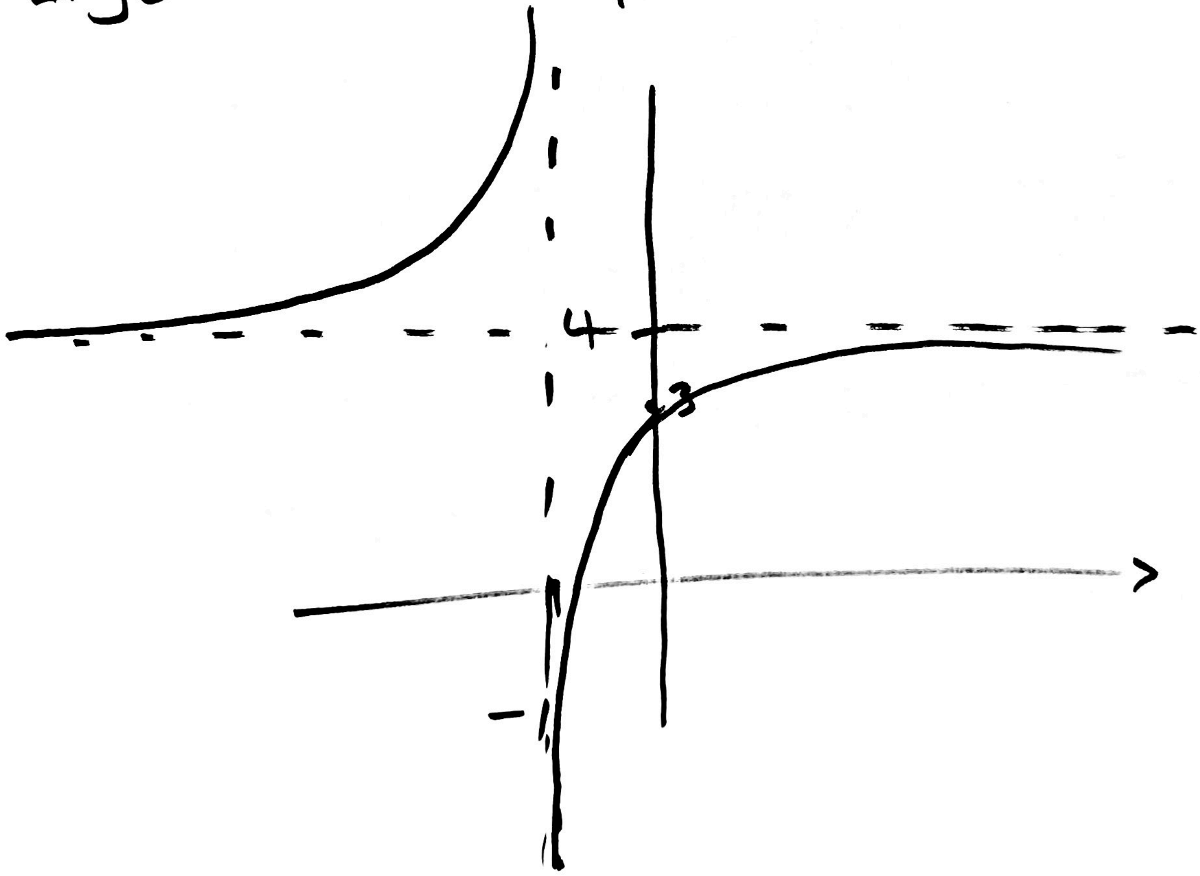
$$= 4 - \frac{1}{x+1}$$

Horisontal asymptote $y = 4$.

Vertikal asymptote $x = -1$

$u'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ for alle $x \in D_u = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ingen ekstremal punkt



$u(x)$ vokser i $\langle -\infty, -1 \rangle$ og i $\langle -1, \infty \rangle$

12

$$v(x) = \frac{x+2}{x^2-2} = \frac{x+2}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$$

Horisontal asymptote $x = 0$

siden $\lim_{x \to \infty} v(x) = 0$.

(og $-\infty$)

Vertikal asymptote $x = \sqrt{2}$ og $x = -\sqrt{2}$.

$$v'(x) = \left((x+2) \cdot \left(\frac{1}{x^2-2}\right)\right)'$$

$$= (x+2)' \frac{1}{x^2-2} + (x+2)\left(\frac{1}{x^2-2}\right)'$$

$$= \frac{1}{x^2-2} + x+2 \left(\frac{-2x}{(x^2-2)^2}\right)$$

$$= \frac{x^2-2 - \cancel{2}x(x+2)}{(x^2-2)^2} = \frac{-x^2-\cancel{2}4x-2}{(x^2-2)^2}$$

Fortegn til $v'(x)$ er lik fortegn til $x^2 - x$

$$-\left(x^2 + \cancel{2}4x + 2\right)$$

$$(x+\cancel{1}2)^2 + \cancel{2} \qquad x = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$v(x) = \frac{x+2}{x^2-2} = \frac{x+2}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$$

Horisontal asymptote $y = 0$

Vertikale asymptoter $x = -\sqrt{2}$ og $x = \sqrt{2}$

Deriverer $v(x)$ (vi benytter produktregelen)

$$v'(x) = \left((x+2)\cdot(x^2-2)^{-1}\right)'$$

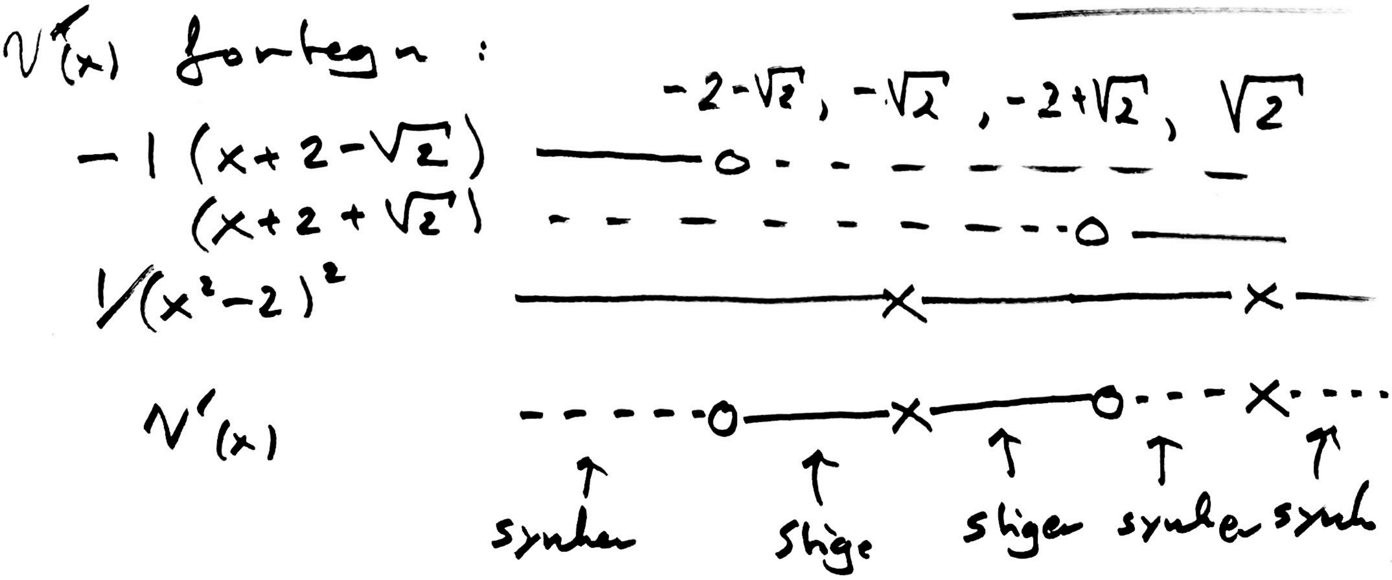
$$= (x+2)'(x^2-2)^{-1} + (x+2)(-1)(x^2-2)'(x^2-2)^{-2}$$

$$= \frac{(x^2-2) - (x+2)\cdot 2x}{(x^2-2)^2}$$

$$= \frac{x^2-2-2x^2-4x}{(x^2-2)^2} = \frac{-(x^2+4x+2)}{(x^2-2)^2}$$

$$= -\frac{((x+2)^2-2)}{(x^2-2)^2} = -\frac{(x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2})}{(x^2-2)^2}$$

$v'(x)$ fortegn:

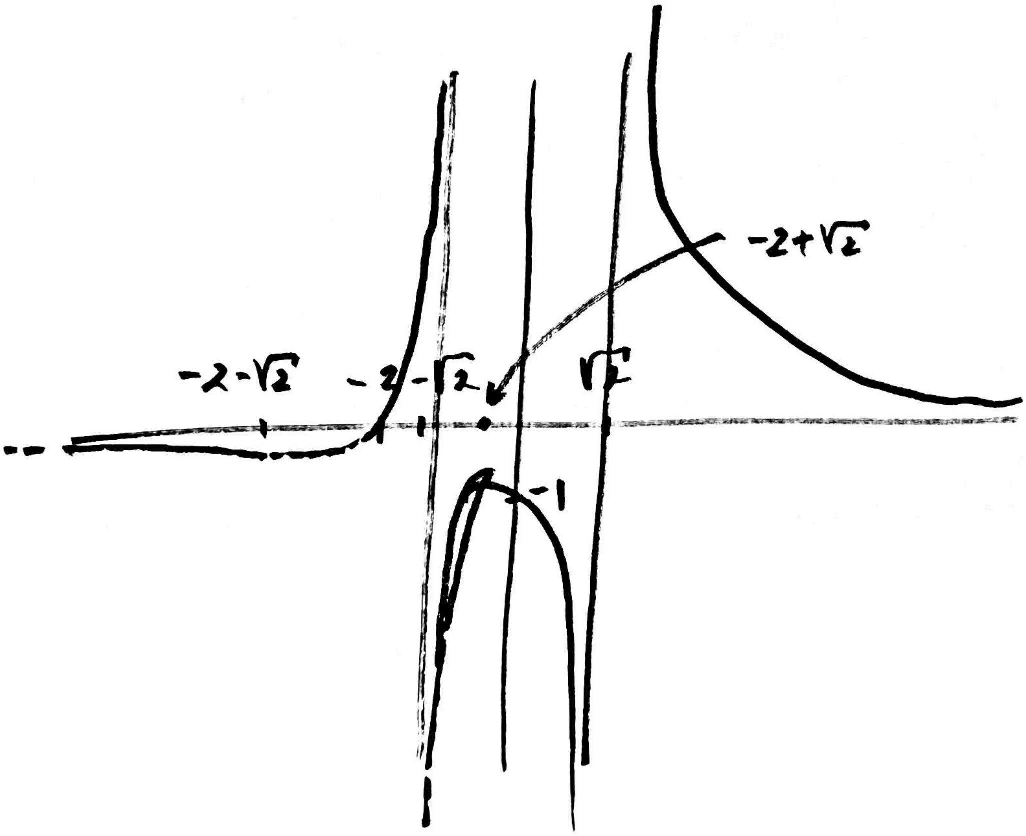


Bunnpunkt i $\left(-2-\sqrt{2},\ V(-2-\sqrt{2})\right)$

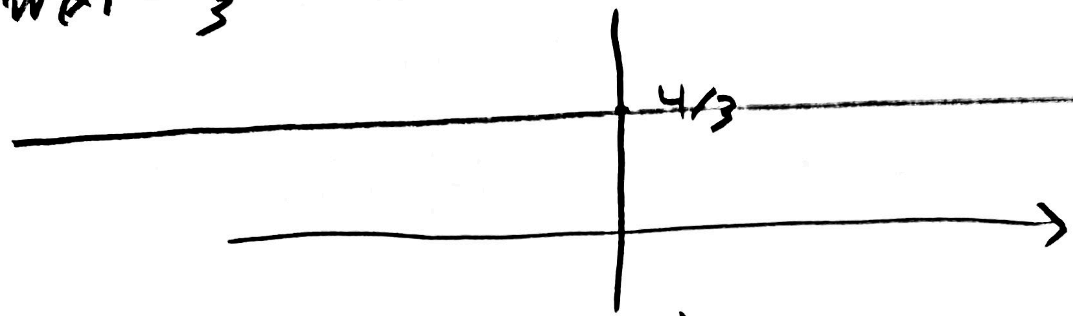
$$\left(-2-\sqrt{2},\ \frac{-\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{2})}\right)$$

Toppunkt i $\left(-2+\sqrt{2},\ \frac{+\sqrt{2}}{4(1-\sqrt{2})}\right)$

$V(x)$ har nullpunkt i $x=-2$.



$12\,w(x) = \frac{4}{3}$



$w(x)$ er sin egen horisontale asymptote: $y = \frac{4}{3}$.

$w(x)$ stiger i $\mathbb{R}$ (men stiger ikke ekte)

synker i $\mathbb{R}$

alle punkt på grafen $(x, \frac{4}{3})$ er både topp og bunnpunkt.

$$y(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{(x-2)(x^2+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+1}{x+2} \quad (\text{og } x \neq 2)$$

polynom divisjon:

$$y(x) = \frac{(x+2)(x-2) + 4 + 1}{x+2}$$

$$= (x-2) + \frac{5}{x+2} \qquad x \neq 2.$$

Vertikal asymptote $\quad x = -2$

(ikke $x = 2$!)

Skrå asymptote $\quad y = x - 2$

$$y'(x) = 1 - \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x+2)^2 - 5}{(x+2)^2} \quad \left(= \frac{x^2 + 4x - 1}{(x+2)^2} \right)$$

$$= \frac{(x+2+\sqrt{5})(x+2-\sqrt{5})}{(x+2)^2}$$

Så $y'(x) < 0$ for $x \in \langle -2-\sqrt{5}, -2 \rangle$

$\cup \langle -2, -2+\sqrt{5} \rangle$

ellers er $y'(x) > 0$.

$Y(x)$ vokser i $\langle -\infty, -2-\sqrt{5}\rangle$

— $\langle -2+\sqrt{5}, \infty\rangle$

$Y(x)$ avtar i $\langle -2, -\sqrt{5}, -2\rangle$

— $\langle -2, -2+\sqrt{5}\rangle$.

$Y'(x) = 0$ for $x = -2+\sqrt{5}$

og $x = -2-\sqrt{5}$

Toppunkt i $(-2-\sqrt{5}, Y(-2-\sqrt{5}))$

$(-2-\sqrt{5}, \underline{-4-2\sqrt{5}})$

Bunnpunkt i $(-2+\sqrt{5}, \underline{-4}+2\sqrt{5})$

skisse