31.10.22 **Eksponent- og logaritmefunksjoner**

2^x, 10^x, $(1/3)^x$ eksponentfunksjoner (grunntallet er fast)

x^2 x^{10} $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ potensfunksjoner. (eksponenten er fast)

$y = x^2$ $x \geq 0$ $x = \sqrt{y} = y^{1/2}$ inversfunksjonen til x^r er $x^{1/r}$, på samme form.

$y = 1/x$ $x \neq 0$ $x = 1/y$

Hva er x?

$y = 10^x$

$10^x = 100$ $x = 2 = \log(100)$

$10^x = \sqrt{10} = 10^{1/2}$ så $x = 1/2 = \log(\sqrt{10})$

$10^x = 1/10 = 10^{-1}$ så $x = -1 = \log(1/10)$

$10^x = -2$ ingen løsning for x

Briggs logaritme $\log(Y)$ er eksponenten til 10 som gir Y.

$$10^{\log(Y)} = Y \qquad Y > 0$$

$$\log(10^a) = a \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\log(100 \cdot 1000) = \log(\underbrace{10^2 \cdot 10^3}_{10^{2+3}}) = 2+3 = \underline{5}$$

oppg

$$\log(\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{100}) = \log(10^{1/2} \cdot (10^2)^{1/3}) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3+4}{6} = \underline{\frac{7}{6}}$$

$$10^x = 2 \qquad 2^3 = 8 \quad \text{så} \quad 10^{3x} = 8$$

$3x$ litt mindre enn 1

x — 0.33...

$$x = \log 2 = \underline{0.3010299\ldots}$$

$$10^x = 7 \qquad x = \log 7 = 0.845\ldots$$

oppg $\log(1) = 0$ $\qquad 10^0 = 1$

$a^0 = 1$ så $\log_a(1) = 0$

estimer $\log(63)$ (hint $\log 2 \sim 0.301$)

$10^{3/2} = 10^1 \cdot 10^{1/2} = 10\sqrt{10} \sim 10 \cdot 3.16\ldots \sim 31.6$

$10^2 = 100$

så $1.5 < \log 63 < 2$

$63 \sim 64 = 2^6 = (10^{0.301})^6 \sim 10^{1.8}$

estimat $\log 63 \sim 1.8$.

$\log 63 = \underline{1.79934..}$

$5^x = 11$ $\qquad x = \log_5 11 = \dfrac{\log(11)}{\log(5)}$

(estimat $\sim 1 + \frac{1}{2} = 3/2$ siden $5^1 \cdot \sqrt{5} \sim 11$)

$= \dfrac{1.04139\ldots}{0.69897\ldots} = \underline{1.48989\ldots}$

log skrives også som lg og Log.

Logaritme med grunntall $a > 0$, $a \neq 1$

$$a^{\log_a y} = y$$

$\log_3(9) = 2$ siden $3^2 = 9$

$\log_2(64) = 6$ $\quad 64 = 8^2 = (2^3)^2 = 2^6$

$\log_{1/10}(100) = -2$ fordi $\left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = \left(\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}\right)^2 = 10^2 = 100.$

$$\log_{1/a}(y) = -\log_a(y)$$

$$a^x = y$$

$$(a^{-1})^{-x} = y$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = y$$

$$a^x = (10^{\log a})^x = 10^{x \cdot \log a} = y$$

$x = \log_a(y)$ og $x \log a = \log y$ så

$$= \frac{\log(y)}{\log(a)}$$

$$\boxed{\log_a y = \frac{\log y}{\log(a)}}$$

Logaritme med base a uttrykt ved 10-er logaritme.

Logaritmereglene

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

"logaritme tar produkt til sum"

$$\log(a^r) = r \cdot \log(a)$$

"eksponenter går utfor"

$$\log(1) = 0$$

$$\log\left(\underbrace{10^m}_{a}\cdot\underbrace{10^n}_{b}\right) = \log\left(10^{m+n}\right) = m+n$$
$$= \log\left(\underbrace{10^m}_{a}\right) + \log\left(\underbrace{10^n}_{b}\right)$$

mer detaljer

$$a = 10^{\log a} \quad \text{og} \quad b = 10^{\log b}$$

$$\underline{\log(a\cdot b)} = \log\left(10^{\log a}\cdot 10^{\log b}\right) = \log\left(10^{\log a+\log b}\right)$$
$$= \underline{\log a + \log b}.$$

$$\log\left(a^r\right) = \log\left(\left(10^{\log a}\right)^r\right) = \log\left(10^{r\log a}\right)$$
$$= r\log a.$$

$3^x = 14$ $\qquad$ $x = \log_3 14 = \dfrac{\log(14)}{\log(3)}$

Anvender log på begge sider av =-tegnet

$\log(3^x) = \log 14$

$x \cdot \log 3 = \log 14$ så $x = \dfrac{\log 14}{\log 3}$

$\approx \underline{2.40217\ldots}$

$4 \cdot 3^x = 2^x$ $\iff$ $4 = 2^x/3^x = (2/3)^x = ((3/2)^{-1})^x$

$= (1.5)^{-x}$

Anvender log...

$\log(4 \cdot 3^x) = \log 2^x$

$\log 4 + \log(3^x) = x \log 2$

$\log 4 + x \log 3 = x \log 2$

så $x = \dfrac{\log 4}{\log 2 - \log 3}$

$\log 4 = -x(\log 1.5)$

$x = \dfrac{-\log 4}{\log 1.5}$

$\approx \underline{-3.419}$

$(1,5)^2 = 2,25$

$(1,5)^3 < 4$

$(1,5)^4 > 4$

$\log 3/2 =$

$\log(3 \cdot 2^{-1}) =$

$\log 3 - \log 2.$

Oppg Løs likningen $2 \cdot 3^x = 15$

$$\log(2 \cdot 3^x) = \log 15$$

$$\log 2 + \log 3^x = \log 15$$

$$x \log 3 = \log 15 - \log 2$$

$$x = \frac{\log 15 - \log 2}{\log 3}$$

$$\underline{\underline{\sim 1{,}834}}$$

Eks

$$25^x + 5^x = 42.$$

$$(5^2)^x + 5^x = 42$$

$$(5^x)^2 + 5^x = 42$$

2.gradslikning i 5^x.

$u = 5^x$

$$u^2 + u - 42 = 0$$

$42 = 6 \cdot 7$

$$u^2 + u - 42 = (u+7)(u-6) = 0$$

$5^x = u = -7$

ingen løsning

$$5^x = u = 6$$
$$\log 5^x = \log 6$$
$$x \log 5 = \log 6$$

Løsningen er: $x = \dfrac{\log 6}{\log 5} \approx \underline{1.113\ldots}$

oppg Løs

$$(2^x)^3 - 5 \cdot (2^x)^2 + 4 \cdot 2^x = 0$$
$$\left(\Leftrightarrow 2^{3x} - 5 \cdot 2^{2x} + 2^{x+2} = 0 \right.$$
$$\left. \Leftrightarrow 8^x - 5 \cdot 4^x + 2^{x+2} = 0 \right)$$

3.grads likning i 2^x.

$2^x > 0$

$$2^x \left((2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 \right) = 0$$

$$2^x(2^x-4)(2^x-1)=0$$

$2^x=0$ ingen løsning

$2^x=4=2^2$ $\quad x=2$

$2^x=1=2^0$ $\quad x=0$

Løsningene er $\underline{x=0 \text{ og } x=2}$.

Eks

$$9^x-3^{x+1}-4=0$$

$$(3^x)^2-3\cdot 3^x-4=0$$

$$(3^x-4)(3^x+1)=0$$

$3^x=4 \Leftrightarrow \log 3^x=\log 4$

$3^x=-1$ ingen løsning

$9=3^2$

$9^x=(3^2)^x=3^{2x}$

$=(3^x)^2$

$3^{x+1}=3^1\cdot 3^x=3\cdot 3^x$

Løsningen er

$$x=\frac{\log 4}{\log 3}=1.2618\ldots$$

* $\log x = 10\,000$

$x = 10^{\log x} = 10^{10\,000}$

* $\log x = 4$ $\qquad x = 10^{\log x} = 10^4 = 10\,000$

* $\underbrace{\log(x^3)}_{3\log x} + \underbrace{\log(5x)}_{\log 5 + \log x} = 7$

$3\log x + \log 5 + \log x = 7$ $\qquad$ lineær likning i $\log x$

$(3+1)\log x = 7 - \log 5$

$\log x = \frac{1}{4}(7 - \log 5)$

$x = 10^{\frac{1}{4}(7-\log 5)} = \sqrt[4]{10^{7-\log 5}} = \sqrt[4]{\frac{10^7}{5}}$

$\sim 10^{1.57525\ldots} \sim 37.60603\ldots$

$$(\log x)^2 - 2\log x = 3 \qquad u = \log x$$

$$u^2 - 2u - 3 = 0$$

$$(u-3)(u+1) = 0$$

$$\log x = u = 3 \qquad x = 10^{\log x} = 10^3 = 1000$$

$$\log x = u = -1 \qquad x = 10^{\log x} = 10^{-1} = 1/10$$

Løsningene er $\underline{x = \frac{1}{10}}$ og $\underline{1000}$

Eks. $P_0 = 1000$ kr i banken til rente 4%.
Hvor lang tid tar det før pengene har økt til 2000 kr?

$$\left(1 + \frac{4}{100}\right) \cdot P_0 = P_1 \qquad P_t = \left(1 + \frac{4}{100}\right)^t P_0$$

$$= (1.04)^t P_0$$

$$P_t = 2P_0 = (1.04)^t P_0$$

$$(1+0.04)^t = 2$$

$$(1.04)^t = 2$$

anvender log:

$$t \cdot \log(1.04) = \log (1.04)^t = \log 2 \approx 0.301$$

$$t = \frac{\log 2}{\log(1.04)} \approx \underline{17.67 \text{ år}}$$

<u>Derivert</u> til eksponentfunksjoner

Definisjonen av den deriverte:

$$(a^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

$$= a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

$$a^{x+h} = a^x \cdot a^h$$

undersøkte grensen i geogebra.

$$(10^x)' = \underbrace{(2.30258\ldots)}_{\text{konstant}} \cdot 10^x$$

$$(10^{x^2})' = (2.30258\ldots) \cdot 10^{x^2} \cdot (x^2)'$$
$$= 2(2.30258\ldots) \cdot x \cdot 10^{x^2}.$$

$$(2^x)' = (0.6931\ldots) \cdot 2^x$$
$$((1/2)^x)' = (2^{-x})' = -(0.6931\ldots)(1/2)^x$$

Det finnes et tall e slik at

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Da $(e^x)' = 1 \cdot e^x = e^x$

Den deriverte blir enklest å beskrive med grunntall e.

$e \sim 2.718281828845\ldots$ irrasjonalt tall.

Eulertallet.

$\ln x = \log_e x$ naturlig logaritme.

$e^{\ln x} = x$ $\ln(e^y) = y$

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a}$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \cdot \ln a} \cdot (x \cdot \ln a)'$$

$$\underline{(a^x)' = \ln a \cdot a^x}$$

$$(10^x)' = \underline{\ln 10} \cdot 10^x$$

$$(2^x)' = \underline{(\ln 2)} \cdot 2^x$$