10 okt. 2022

Grenser, kontinuitet, asymptoter

Derivasjon.

(men ulika)

"Grensen til $f(x)$ når x nærmer seg a er lik L" (limit eng. grense)

skriver vi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

eks: $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

$$\left(\begin{array}{l} x^2 - 4 = (x+2)(x-2) \\ \sim 4(x-2) \\ \text{for } x \text{ nær } 2. \end{array} \right)$$

det. for $x \neq 2$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x-2}$ både teller og nevner nærmer seg 0 når $x \to 2$.

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 2+2 = \underline{4}$$

Presis definisjon av grense:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ betyr:

For alle $\epsilon > 0$ så finnes $\delta > 0$

slik at $|f(x) - L| < \epsilon$ for alle x

slik at $0 < |x - a| < \delta$

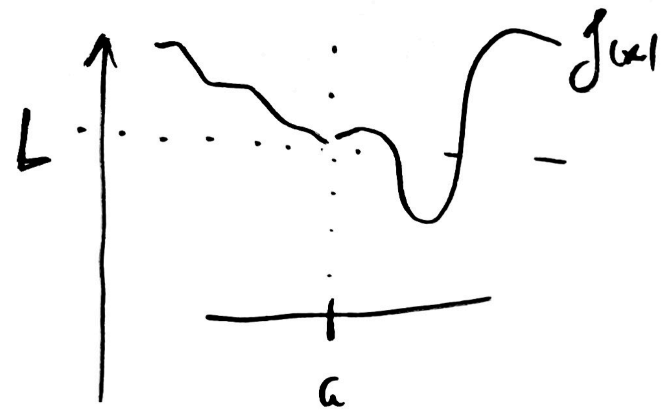
(så $x \neq a$)

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \qquad \left(\text{type } \tfrac{0}{0}\right)$$

"null over null"

Testet i geogebra og "funnet": $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}$

Algebraisk: $$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \to 1} \underbrace{\frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{x - 1}}_{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{1+1} = $$
$$=$$



grafen til $f(x)$ nermer seg $y = L$ når x nermer seg a.

$$f(x) = \begin{cases} 1.41x & x \leq 1 \\ \sqrt{x+1} & x > 1 \end{cases}$$

Grensen

$\lim_{x \to 1} f(x)$ eksisterer ikke.

(selv om grafen ser sammenhengende ut før man zoomer inn)

Grenser fra venstre og høyre (ensidige grenser)

Venstre side av a (negativ side) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$

Høyre side av a (positiv side) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$

I eksempelet ovenfor

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1.41x = 1.41$$

Forskj

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

opg. Finn grensen $x \to 0$ fra venstre og høyre av

$$g(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x>0 \\ \frac{-x}{x} & x<0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = \underline{1} \quad \text{og} \quad \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} -1 = \underline{-1}$$

$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ eksisterer ikkje.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ hvis $f(x)$ nærmer seg L når x blir stor.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+2} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0.$$

opg:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{x^2+x-x^2}^{x}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}} + x}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$$ (type $\frac{0}{0}$)

polynom divisjon $\frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1$

$$= \lim_{x\to 1} 1+x+x^2 = \underline{3}$$

Grensesetningene

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ og $\lim_{x\to a} g(x) = M$

* $\lim_{x\to a} \left(f(x)+g(x)\right) = L+M$

$\lim_{x\to a} \left(k\cdot g(x)\right) = k\cdot M$

* $\lim_{x\to a} \left(f(x)\,g(x)\right) = L\cdot M$

* $\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$ $M \neq 0$

(vises fra ϵ-δ-def. av grenser)

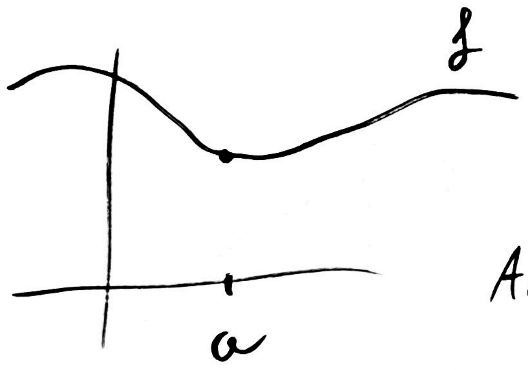
Kontinuitet

$f(x)$ er kontinuerlig i $x=a$ hvis

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ eksisterer og $L = f(a)$

gir bare mening for $a \in D_f$.

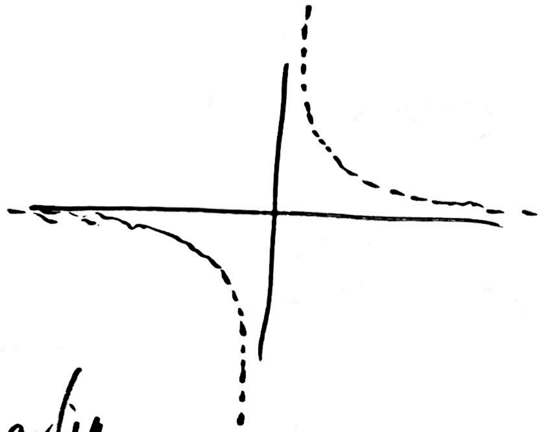


" $f(x)$ nærmer seg $f(a)$ når x nærmer seg a "

Alle polynomer er kontinuerlige i alle punkt.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$f(x) = \frac{1}{x}$

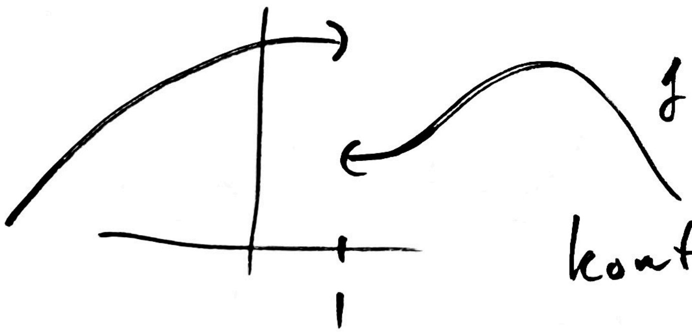


$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x)$ er kontinuerlig i alle $x \in D_f$.

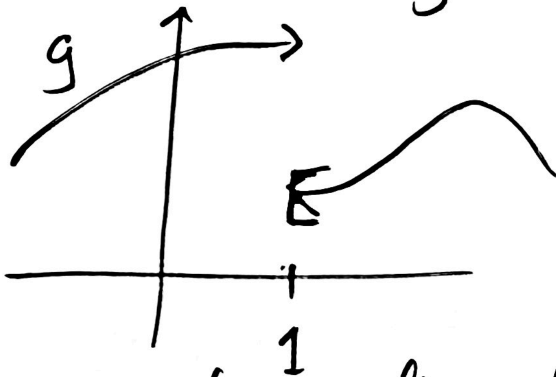
$f(x)$ er kontinuerlig hvis $f(x)$ er kont. for alle $x \in D_f$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



kontinuerlig

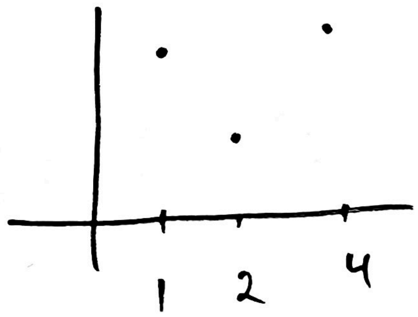
$D_g = \mathbb{R}$



g er diskontinuerlig i $x = 1$.

$\lim_{x \to 1^-} g(x) \neq \lim_{x \to 1^+} g(x) = g(1)$

$h(x)$



kontinuerlig.

$\lim_{x \to 1} h(x)$ ingen $x \neq 1$ i nærheten av 1

(ingen grens, så kravet bortfaller)

f kontinuerlig i a

For alle $\epsilon > 0$ finnes det en $\delta > 0$ $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ for $|x-a| < \delta$.

Rasjonale uttrykk er kontinuerlige

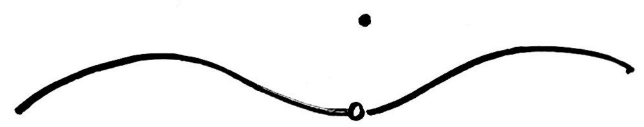
$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ p, q polynomer. Den naturlige definisjonsmengden er x slik at $q(x) \neq 0$.

$a \in D_R$ $\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \to a} p(x)}{\lim_{x \to a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$

$= R(a)$

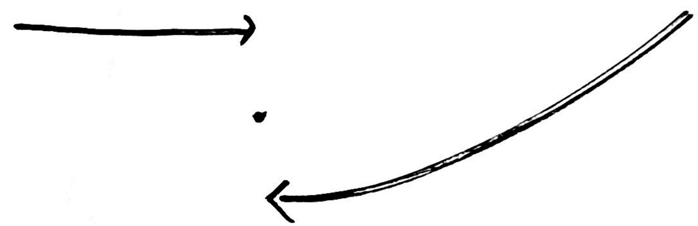
Typer diskontinuiteter.

1 Hevbar diskontinuitet



$\lim_{x \to a} f(x)$ eksisterer, men er ulik $f(a)$.

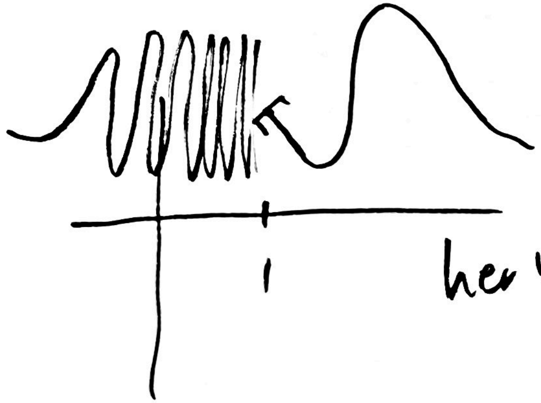
2. Hopp diskontinuitet



$\lim_{x \to a^-} f(x)$ og $\lim_{x \to a^+} f(x)$ eksisterer, men er ulike.

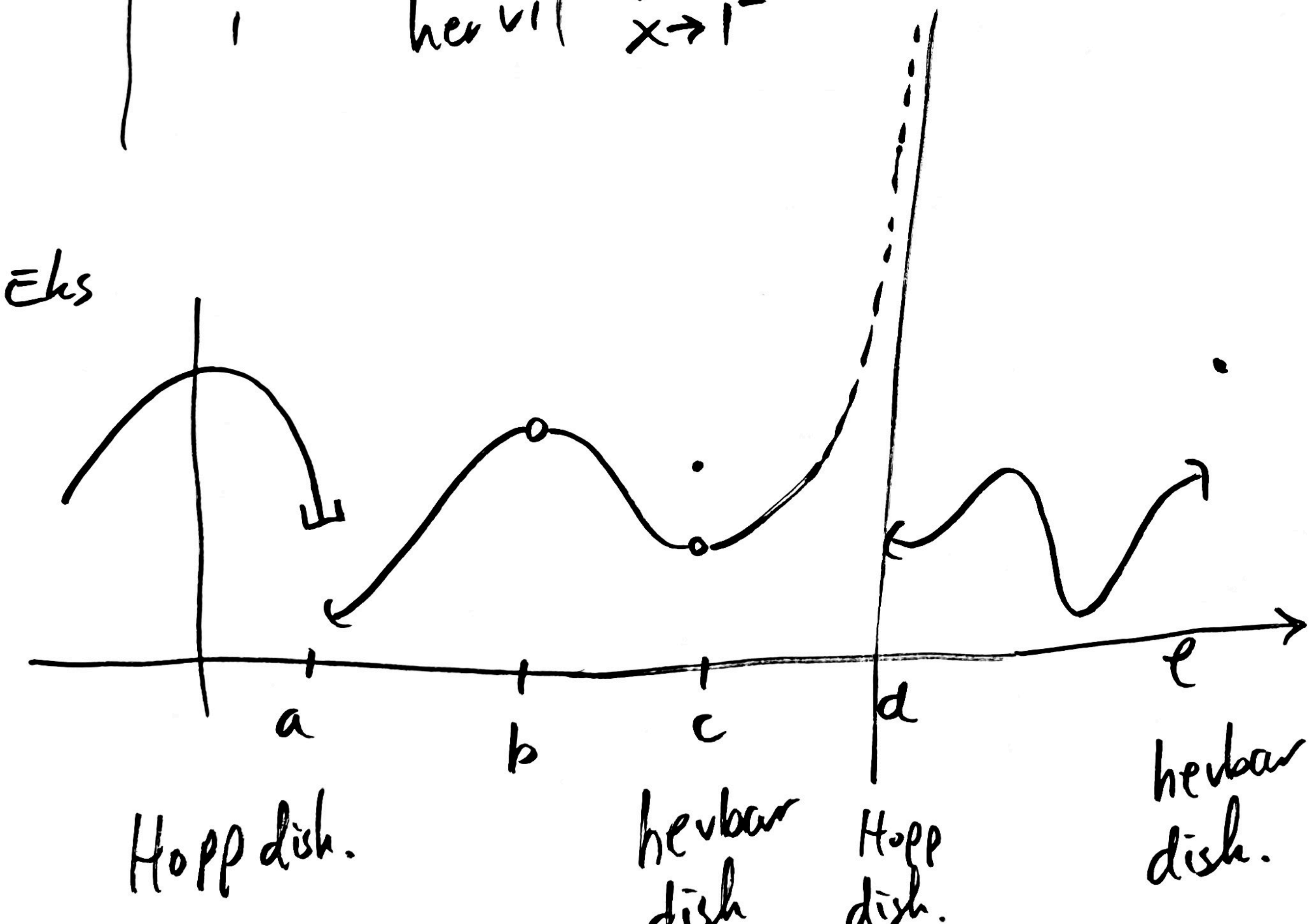
$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

3. Essensiell diskontinuitet $\lim_{x \to a^-} f(x)$ eller $\lim_{x \to a^+} f(x)$ eksisterer ikke.



her vil $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ ikke eksistere

Eks



Finn diskontinuiteter til funksjonen (Tilsvarende 9 g) i oblig 2)

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x < -2 \\ 2x+1 & -2 < x < 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x} & 1 \leq x \end{cases}$$

Mulige diskont. ved skifte av funksjonsuttrykk (hev.)

$$\left(\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} x - 1 = -3 \qquad \text{unødig å sjekke dette. } -2 \notin D_f \right.$$

$$\left. \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (2x+1) = -3 \right)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2x+1 = 1, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 1 = f(1)$$

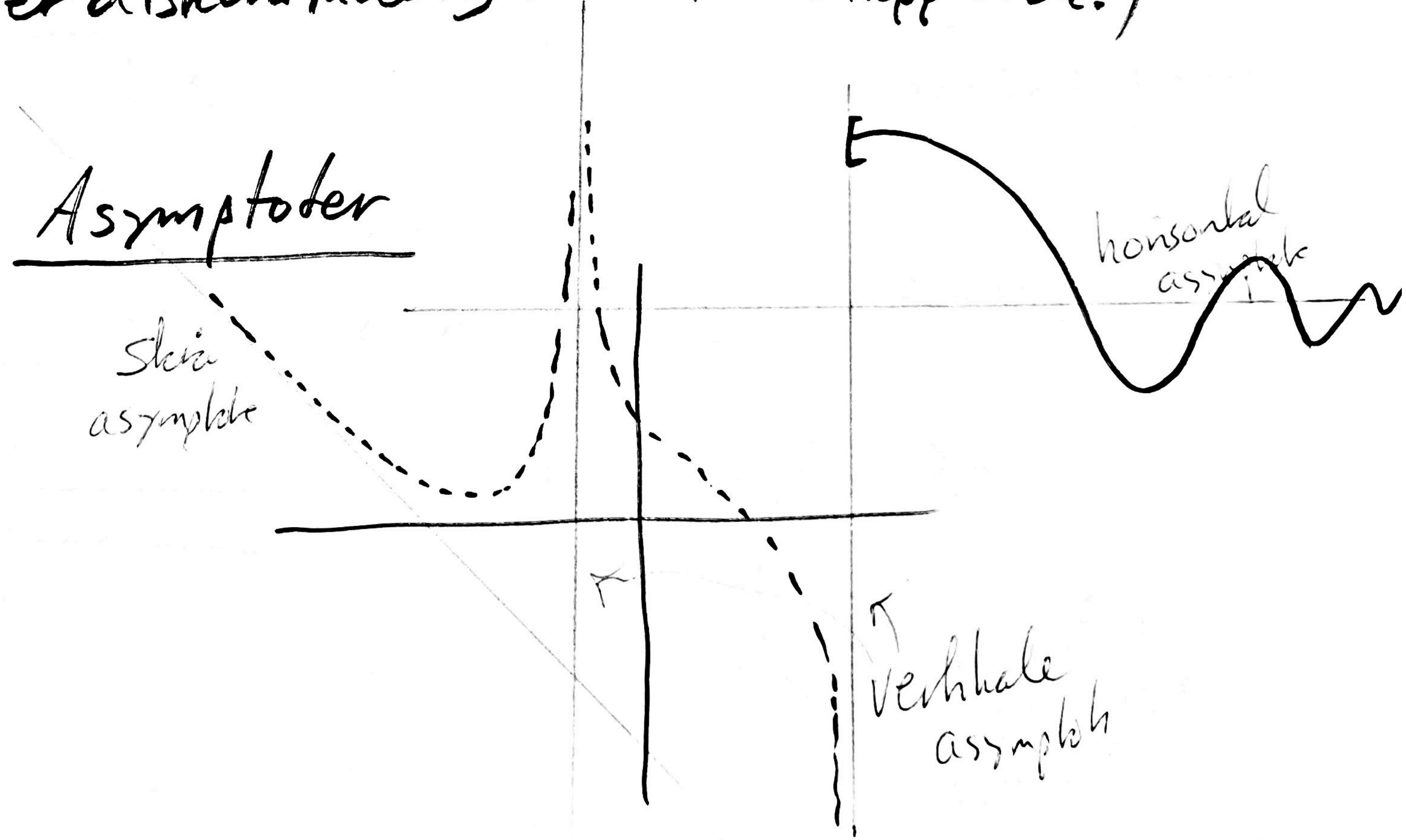
så f er kont. i $x = 0$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x} = 1 \qquad f(1) = 1$$

$f(x)$ er diskontinuerlig i $x=1$ (hopp disk.)

Asymptoder



Eks $R(x)\ \dfrac{x^3+2x^2+1}{x^2-2}$ pol. div

$$x^3+2x^2+\ \ +1 : x^2-2 = x+2+\frac{2x+5}{x^2-2}$$

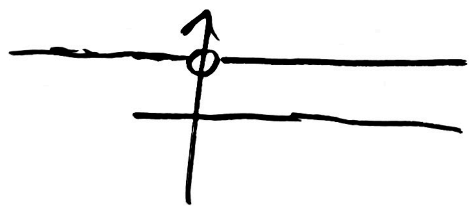
$$\begin{array}{l} x^3 - 2x \\ \hline 2x^2+2x+1 \\ 2x^2 - 4 \\ \hline 2x+5 \end{array}$$

$R(x) - (x+2) \to 0$
når $x \to \infty$
og når $x \to -\infty$

Skrå asymptote $y = x+2$

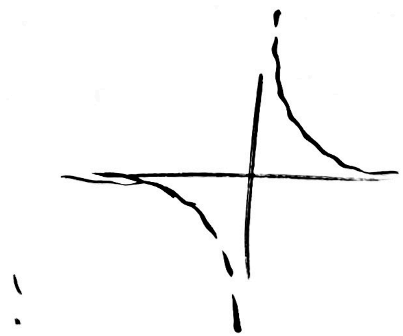
vertikale asymptoter i $x = \sqrt{2}$ og $x = -\sqrt{2}$.

Eks $\dfrac{x}{x}$



horisontal asymptote $y = 1$

$$\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$



vertikal asymptote $x=0$

horisontal asympt. $y=0$.

opg. Finn asymptotene til $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 4}$

$$f(x) = \frac{x(x^2 - x - 2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x(x+1)}{x+2} \qquad (x \neq \pm 2)$$

$$f(x) = \frac{x(x+2-1)}{x+2} = x + \frac{x(-1)}{x+2}$$

$$= x - \frac{x+2-2}{x+2} = \underline{x - 1 + \frac{2}{x+2}}$$

Skrå asymptote $\quad y = x - 1$

Vertikal asymptote $\quad x = -2.$

(ingen vertikal asymptote i $x = 2$ selv om $x^2 - 4 = 0$ for både $x = 2$ og $x = -2$.)

Vertikale asymptoter.

$f(x)$ har en vertikal asymptote i $x = a$

hvis $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (eller $-\infty$)

eller $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (eller $-\infty$).

(selv om $\lim\limits_{a \to a^+} |f(x)| = \infty$ så behøver vi ikke $f(x)$ ha en vertikal asymptote)

Det kan være uendelig mange vertikale asymptoter.

Skrå asymptoter: $y = ax+b$ er en asymptote for $f(x)$

hvis $\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$

eller $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$

Det er 0, 1 eller 2 skrå asymptoter.

Hvis $a=0$ (horisontal linje): horisontal asymptote.

$\frac{p(x)}{q(x)}$

Rasjonal funksjon

Bare mulig med vertikale asymptoter for x s.a. $q(x)=0$

#vert. asymptoter $\leq \deg q$.

$\deg p < \deg q$ Horisontal asymptote $y = 0$

$\deg p = \deg q$ —— " —— $y = a \ (\neq 0)$

$\deg p = (\deg q) + 1$ pol. div gir $\frac{p}{q} = ax + b + \frac{r}{q}$

$\deg r < \deg q$

(ekte) skrå asymptote.

$\deg p - \deg q \geq 2$ ingen skrå asymptoter.

Hvis en rasjonal funksjon har én skrå asymptote, så er dette en skrå asymptote for grafen både på venstre og høyre side.