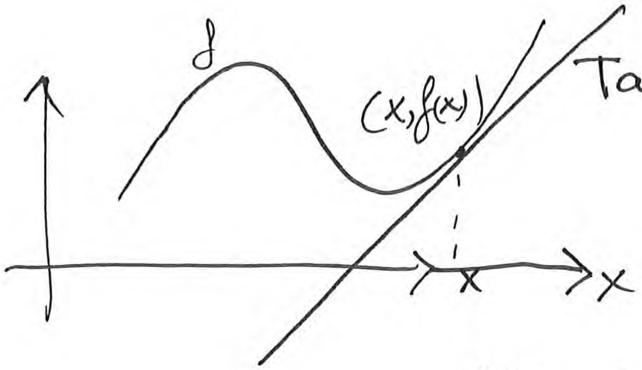
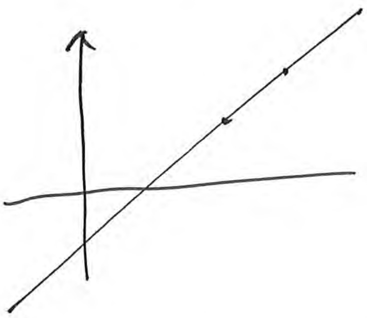
28.09.22 **Derivasjon** (kap 6 og 7)



Tangentlinjen til (grafen til) f i punktet $(x, f(x))$.



$f(x) = ax + b$

Tangentlinjen er linjen selv (for alle x)

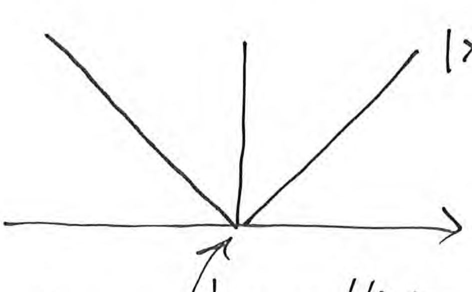
Den <u>deriverte</u> til $f(x)$ i x er stigningstallet til tangentlinjen til f i $(x, f(x))$

Får en verdi for hver x i D_f hvor vi har en tangentlinje. Gir en funksjon

$f'(x)$ (alternative skrivemåter: $D_x f(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$)

$$(2x+3)' = 2 \quad \text{alle } x$$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

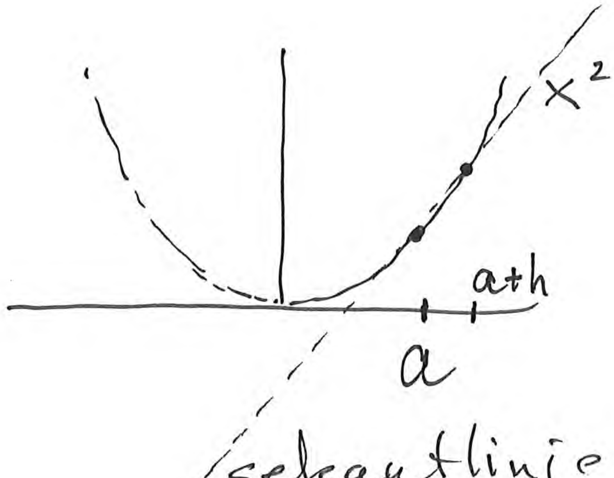


ingen tangentlinje

$$(|x|)' = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

ikke deriverbar i $x = 0$.

$f(x) = x^2$



sekantlinje
linje gjennom to punkt på grafen.

Stigningstallet til sekantlinjen gjennom $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$

er $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$

$\underline{\Delta x = h}$

$= \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

For $f(x) = x^2$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(a+\Delta x)^2 - a^2}{\Delta x}$

$= \dfrac{a^2 + 2a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - a^2}{\Delta x}$

$= \dfrac{2a\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2a + \Delta x)}{\Delta x}$

$= \underline{2a + \Delta x}$

Grensen når $\Delta x \to 0$ er $2a$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (2a + \Delta x) = 2a.$$

Definisjon

Den deriverte

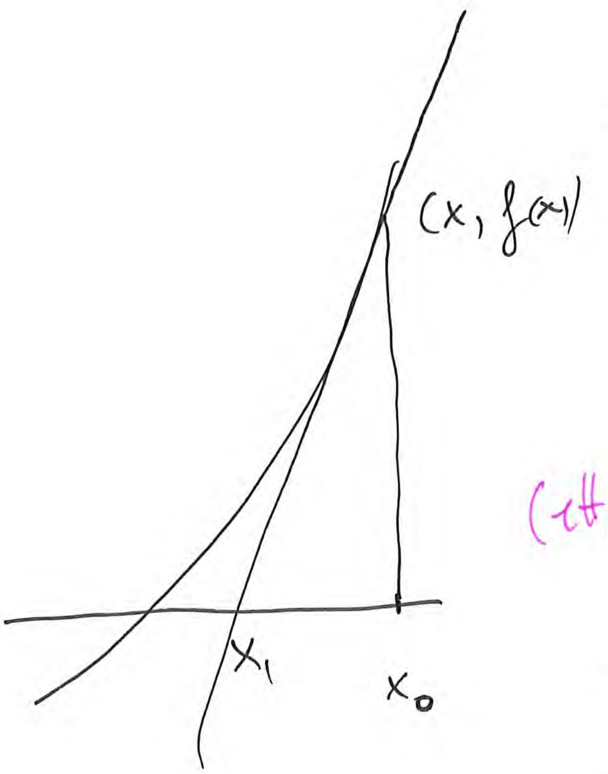
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

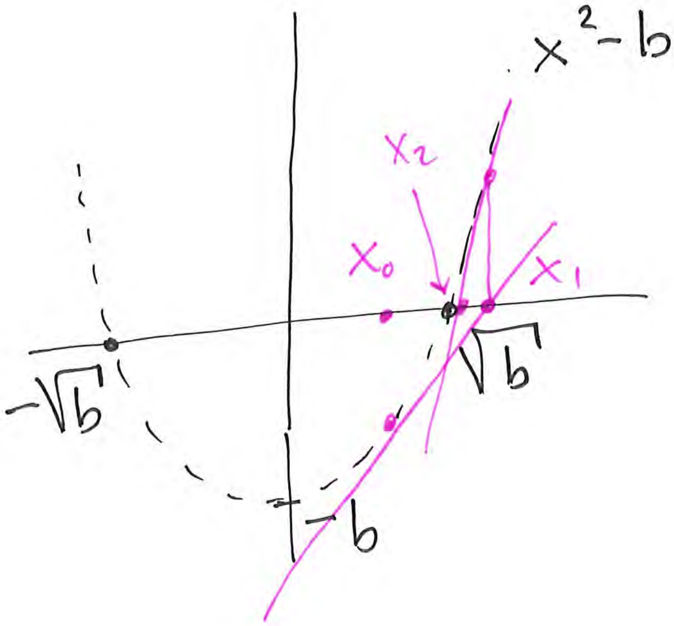
(hvis grensen ikke så sier vi at f ikke er deriverbar i punktet).

Vi sag at

$$(x^2)' = 2x$$

Newtons metode





Tangentlinjen i $(x_0, f(x_0))$

(ettpunktsformelen)

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

treffer x-aksen når $y = 0$

$$0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) = -f(x_0)$$

$$x_1 - x_0 = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Itterativ formel: $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

For $f(x) = x^2 - b$ får vi:

$f'(x) = 2x$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - b}{2x_0} = \frac{x_0 \cdot 2x_0}{2x_0} - \frac{x_0^2 - b}{2x_0}$$

$$x_1 = \frac{2x_0^2 - (x_0^2 - b)}{2x_0} = \frac{x_0^2 + b}{2x_0}$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{x_n^2 + b}{2x_n}}$$

Benyttet til å regne ut kvadratrøtter i en Pyton-øving.

Ettpunkts formelen

Stigningstall a

Punkt (x_0, y_0)

Linja med stigningstall a gjennom (x_0, y_0)

er $y = a(x - x_0) + y_0$

Hvis stigningstallet er $a = f'(x_0)$

og $y_0 = f(x_0)$ blir dette:

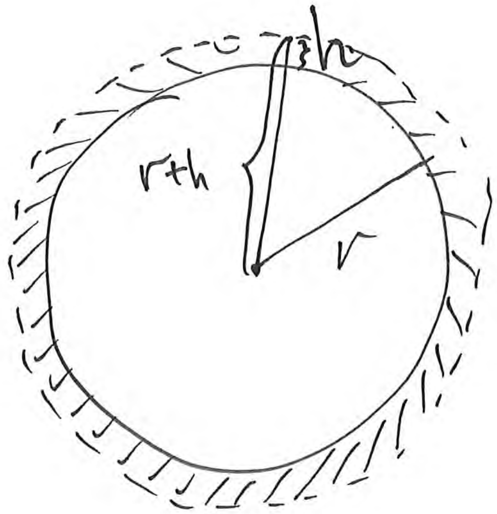
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Dette er tangentlinjen til $f(x)$ i $(x_0, f(x_0))$.

Areal $A(r) = \pi \cdot r^2$

Omkrets $O(r) = 2\pi \cdot r$

$$(A(r))' = O(r)$$

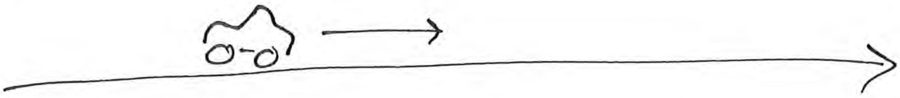


$$\lim_{h \to 0} \frac{A(r+h) - A(r)}{h} = O(r)$$

$$\boxed{A'(r) = O(r)}$$

$$(\pi r^2)' = \pi(2r) = 2\pi r.$$

$S(t)$



$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}}_{\text{gjennomsnittlig hastighet i } [t,\, t+\Delta t].}$$

momentan hastighet

$S'(t) = V(t)$ hastighet

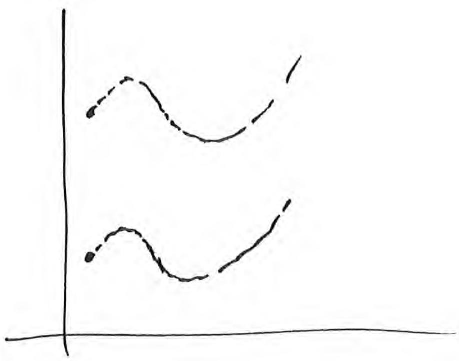
$V'(t) = a(t)$ akselerasjon.

* hastighet — størrelse og retning

fart — størrelsen til hastigheten.

* Hvis $F'(x) = G'(x)$ alle x

Da er $F(x) = G(x) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstant.}}}{C}$



$a(t) = a$ konstant.

$v'(t) = a$

$v(t) = at + v_0$ hvor $v(0) = v_0$

$s'(t) = at + v_0$

$$\underline{s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0}$$ hvor $s(0) = s_0$

Bevegelses likningen.

Hvis $a(t) = 2t - 3$

$v(t) = t^2 - 3t + v_0$

$s(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + v_0 t + s_0$

$\vdots$

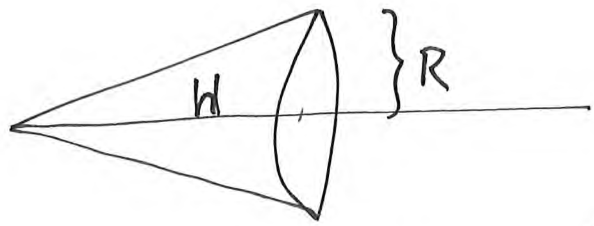
(Benyttet: $(t^3)' = 3t^2$)

Bevis

$$(t^3)' = \lim_{h \to 0} \frac{(t+h)^3 - t^3}{h}$$

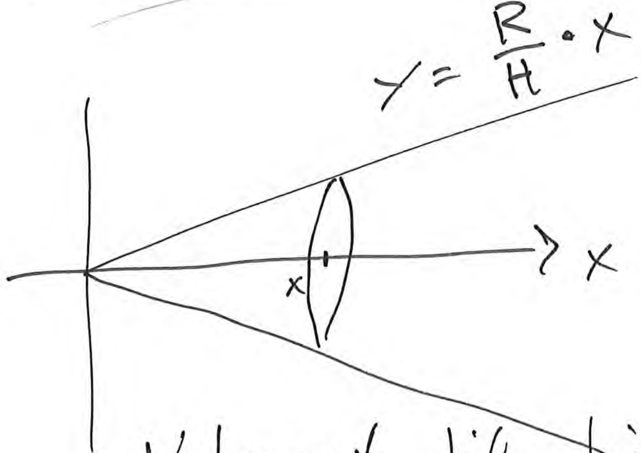
$$= \lim_{h \to 0} \frac{t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3 - t^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3t^2 + 3t \cdot h + h^2) = \underline{\underline{3t^2}}$$



Volum til kjegle

$$V = \frac{H}{3}(\pi R^2) = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

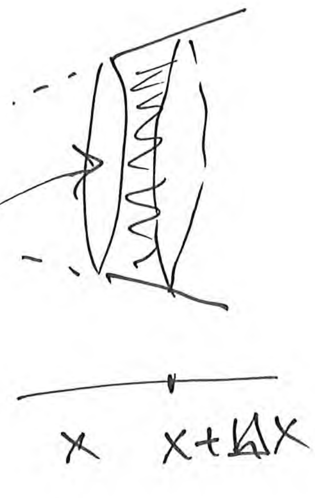


når $x = H$
så er $y = R$.

Volumet til kjeglen frem til x

$V(x)$

$$V'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}$$



$$= \text{tverrsnittarealet}$$

$$= \pi\left(\frac{R}{H}\cdot x\right)^2$$

$$V'(x) = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot x^2$$

$$V(x) = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3} + \overbrace{V(0)}^{0}$$

$$V(H) = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3} = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

Derivasjon er lineær

$$\left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot f'(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{k \cdot f(x+\Delta x) - k f(x)}{\Delta x} =$$

$$k \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

og

$$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - \left(f(x) + g(x)\right)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

Eksempel

$$\left(4x^3 - 2x^2 + 7x + 3\right)'$$

$$= 4(x^3)' - 2(x^2)' + 7(x)' + (3)'$$

$$4 \cdot 3x^2 - 2(2x) + 7(1) + 0 = \underline{12x^2 - 4x + 7}$$