26.09.22 5.9 Irrasjonale likninger

$\sqrt{9-x} = x-3$ "ser at" $x=5$ er en løsning.

kvadrerer begge sider av $a = b \overset{\text{impliserer}}{\Longrightarrow} a^2 = b^2$

$\Updownarrow$

$\sqrt{a^2} = |a| = |b| = \sqrt{b^2}$

$a = b \iff$

eller $a = -b$

$a=b$, kvadrer begge sider $a^2 = b^2$, løser likning

sjekker hvilke av løsningene som faktisk er løsninger til $a=b$.

"Fjerner" falske løsninger, dvs. løsningen til $a = -b \ (\neq 0)$

$a = 2$ kvadrer $a^2 = 2^2 = 4$

løsningen til $a^2 = 4$: $|a| = \sqrt{a^2} = \sqrt{4} = 2$

$a = 2$ og $a = -2$

ekte falsk løsning.

Tilbake til: $\sqrt{9-x} = x-3$

$\Rightarrow 9-x = (\sqrt{9-x})^2 = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + x + 9 - 9 = x^2 - 5x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-5) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 5$.

Sjekker for falske løsninger : $x = 0$ HS : $0 - 3 = -3$ Falsk

VS : $\sqrt{9-0} = 3$

Løsningen til $\sqrt{9-x} = x-3$ er $\underline{\underline{x=5}}$

$x = 5$: HS : $5 - 3 = 2$ Ekte

VS : $\sqrt{9-5} = 2$

kvadrer begge sider av likhetstegnet

Eks $\sqrt{x} = 2-x$

$\Rightarrow \quad x = (2-x)^2 = x^2 - 4x + 4$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1) = 0$

$x=1$ og $x=4$

sjekker

$x=1$ $\quad 1 = \sqrt{1} = 2-1 = 1$ ✓

$x=4$ $\quad 2 = \sqrt{4} = 2-4 = -2$ Falsk

Løsningen er $\underline{\underline{x=1}}$

Opg

$2\sqrt{4-x} = 1-x$

$\Rightarrow \quad 2^2(4-x) = (1-x)^2$

$16 - 4x = x^2 - 2x + 1$

$16 = x^2 - 2x + 1 + 4x = x^2 + 2x + 1$

$$16 = (x+1)^2$$

(alternativt : $x^2 + 2x - 15 = 0 \ldots$)

$$x+1 = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

$x = -1 \pm 4$ så $x = 3$ og $x = -5$.

$x=3$ gir $2 = 2\sqrt{1} = 1-3 = -2$ falsk løsning

$x=-5$ $6 = 2\sqrt{4+5} = 1-(-5) = 6$ ekte

Løsningen er $\underline{x = -5}$

$$\sqrt{9-x^2} + 1 = x$$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{9-x^2} = x-1$ kvadrerer begge sider

$$9-x^2 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$2x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 4 = 0$

Løser 2-grads likning $\quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 (-4)}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2} < \dfrac{-3}{2}$ Falsk

høyre og venstre side, begge positive : Ekte

$x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \sim 2.5$

Løsningen er $\quad \underline{x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}$

Eks

$1 + \sqrt{x} = 2\sqrt{x-1}$ kvadrerer

$\Rightarrow (1+\sqrt{x})^2 = (2\sqrt{x-1})^2$

$1 + x + 2\sqrt{x} = 4(x-1) = 4x - 4$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 4x - 4 - (1+x) = 3x - 5$ kvadrer

$\Leftrightarrow$

$4x = (3x-5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$

$\Rightarrow$

$$9x^2 - 34x + 25 = 0 \quad \text{alternativt } (9x-25)(x-1) = 0$$

$$x = \frac{34 \pm \sqrt{(34)^2 - 4\cdot 9\cdot 25}}{2\cdot 9} = \frac{2\left(17 \pm \sqrt{17^2 - 9\cdot 25}\right)}{2\cdot 9}$$

$$= \frac{1}{9}\left(17 \pm \sqrt{289 - 225}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(17 \pm \sqrt{64}\right)$$

$$= \frac{17 \pm 8}{9}$$

$$(17)^2 = (10+7)^2 = 10^2 + 2\cdot 7\cdot 10 + 7^2 = 240 + 49 = 289$$

$$x = 1 \quad \text{og} \quad x = \frac{25}{9}$$

$x = 1$ VS: $1 + \sqrt{1} = 2$ HS: $2\sqrt{1-1} = 0$

Ekke

$x = \frac{25}{9}$ VS $1 + \sqrt{\frac{25}{9}} = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$

HS $2\sqrt{\frac{25}{9} - 1} = 2\sqrt{\frac{25-9}{9}} = 2\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{2\cdot 4}{3} = \frac{8}{3}$ ✓

Løsningen er $x = \frac{25}{9} = 2 + \frac{7}{9}$

$= 2.777...$

opg

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x-1} = 2 - \sqrt{x}$$ kvadrere

$$x - 1 = 4 + x - 4\sqrt{x}$$

$$4\sqrt{x} = 5$$

$$\sqrt{x} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \sim 1{,}5625$$

Logiske symbol

$\Rightarrow$ implikasjon

$\Leftarrow$

$a \Rightarrow b$ og $b \Rightarrow a$ kombineres

til $a \Leftrightarrow b$ ekvivalens

$$a = b \Rightarrow a^2 = b^2$$

$2 = -2$ men $2^2 = (-2)^2 = 4$

Galt Sant

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b|$$

$a \wedge b$

b \ a	S	F
S	S	F
F	F	F

$a \vee b$

b \ a	S	F
S	S	S
F	S	F

$\wedge$ OG

$\vee$ ELLER

(Python: AND, OR)

$\exists$ eksistens

$\forall$ for alle

$\neg$ ikke

$\exists x \quad x^2 = 9$

$\forall x_{\in \mathbb{R}} \quad x^2 \geq 0$

python : not

Eksamensoppgave 27mai 2015

$$\sqrt{x+2} - 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 1 + 2x$$

kvadrerer

$$x+2 = (1+2x)^2 = 1 + 4x + 4x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$(4x-1)(x+1) = 0$$

$x = \frac{1}{4}$ og $x = -1$.

sjekker

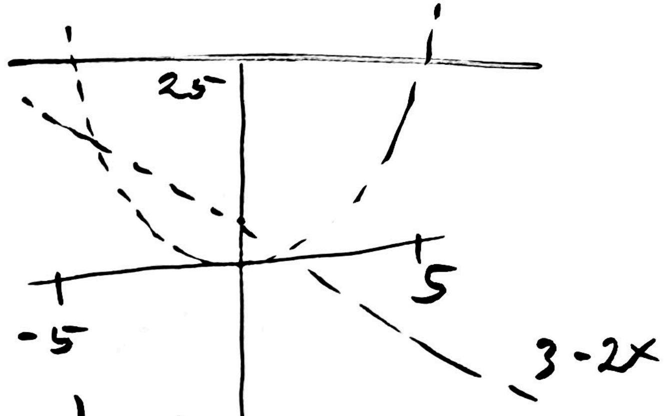
$x = -1$: $1 = \sqrt{1} = 1 - 2 = -1$ Falsk

$x = \frac{1}{4}$ VS: $\sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \sqrt{\frac{1+8}{4}} = \frac{3}{2}$ Ekte

HS: $1 + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

Løsningen er $\underline{x = \frac{1}{4}}$

Ulikheter



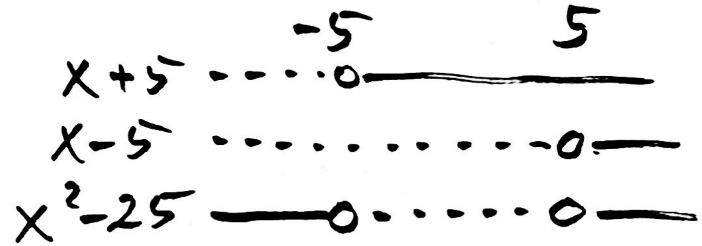
$$3-2x < x^2 \leq 25$$

$$3-2x < x^2 \quad \wedge \quad x^2 \leq 25$$

Løser de to likningene, finner felles løsning.

1) $x^2 \leq 25 \iff x^2 - 25 \leq 0$

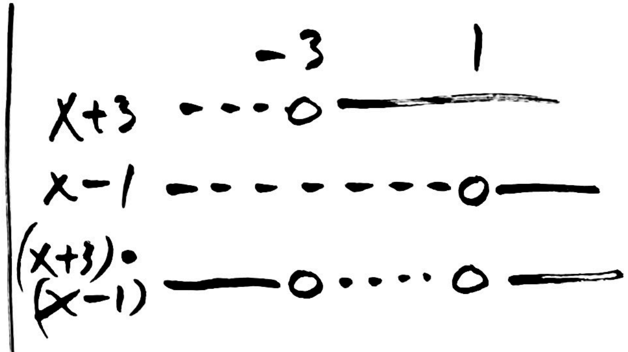
$(x-5)(x+5) \leq 0$



$x \in [-5, 5]$.

2) $3-2x < x^2 \iff 0 < x^2 + 2x - 3$

$0 < (x+3)(x-1)$



$x \in \langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$.

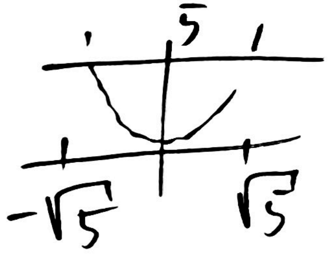
Løsningene er $\underline{x \in [-5, -3\rangle \cup \langle 1, 5]}$

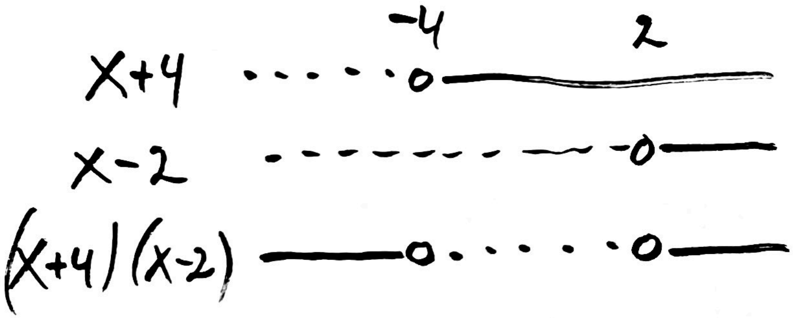
opg $\quad x^2 + x - 3 < 5 - x < 10 - x^2 - x$

$x^2 + x - 3 < 5 - x \iff x^2 + 2x - 8 < 0$

og $\quad 5 - x < 10 - x^2 - x \iff x^2 < 10 - 5 = 5$

$(x+4)(x-2) < 0$ $\quad$ og $\quad x^2 < 5$





og $\quad x \in \langle -\sqrt{5}, \sqrt{5} \rangle$.

$x \in \langle -4, 2 \rangle$

Felles løsninger er $\quad \underline{\langle -\sqrt{5}, 2 \rangle}$

$$3x^2-16 \leq x^2 < x^3+5x^2+x-6$$

$3x^2-16 \leq x^2 \Leftrightarrow 2x^2-16 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 8$

OG

$x^2 < x^3+5x^2+x-6 \Leftrightarrow x^3+4x^2+x-6 > 0$

1) $x^2 \leq 8$ $\qquad \underline{x} \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$

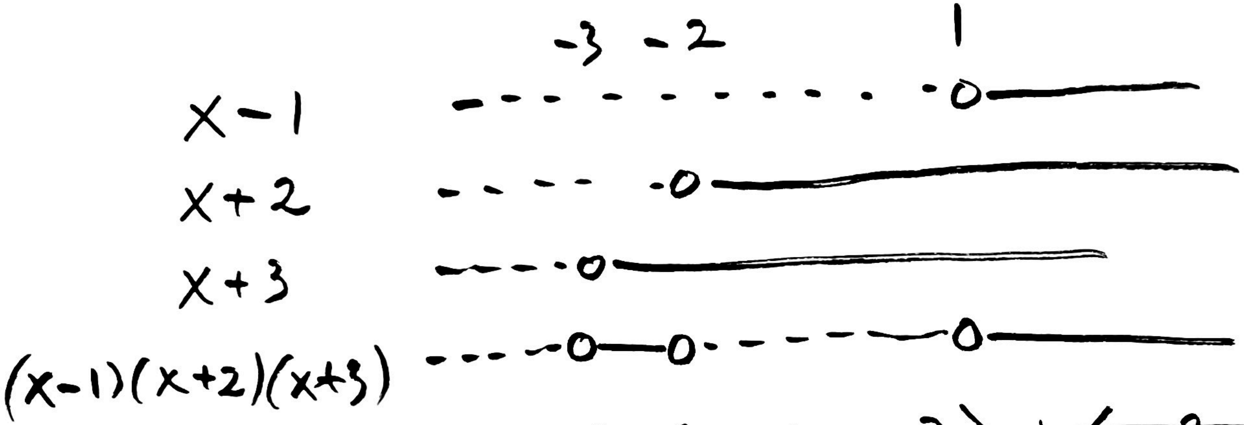
2) $x^3+4x^2+x-6=0$ har løsning $x=1$

$x-1$ er en faktor. Utfører polynomdivisjon

$$x^3+4x^2+x-6 : x-1 = x^2+5x+6$$

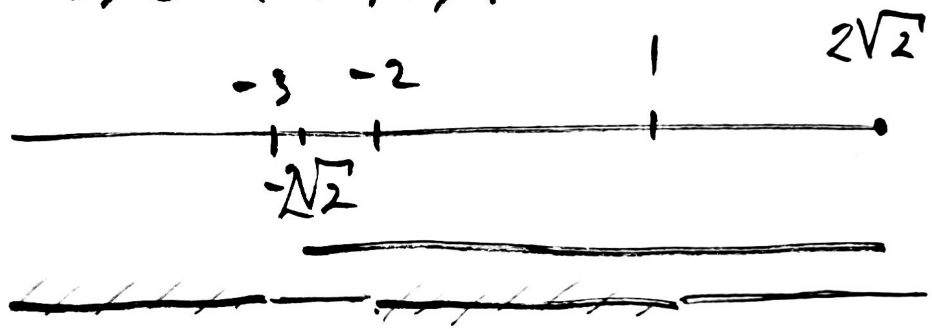
$$\begin{array}{l}
\underline{x^3-x^2} \\
\quad 5x^2+x-6 \\
\quad \underline{5x^2-5x} \\
\qquad 6x-6 \\
\qquad 6x-6 \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$x^3+4x^2+x-6 = (x-1)(x^2+5x+6)$$
$$= (x-1)(x+2)(x+3) > 0$$



$x \in \langle -3, -2 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$

$\cancel{x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle -2, 1 \rangle}$.



Felles løsninger

er $\cancel{\langle -2, 1 \rangle}$ $\quad$ $\underline{[-2\sqrt{2}, -2\rangle \cup \langle 1, 2\sqrt{2}]}$