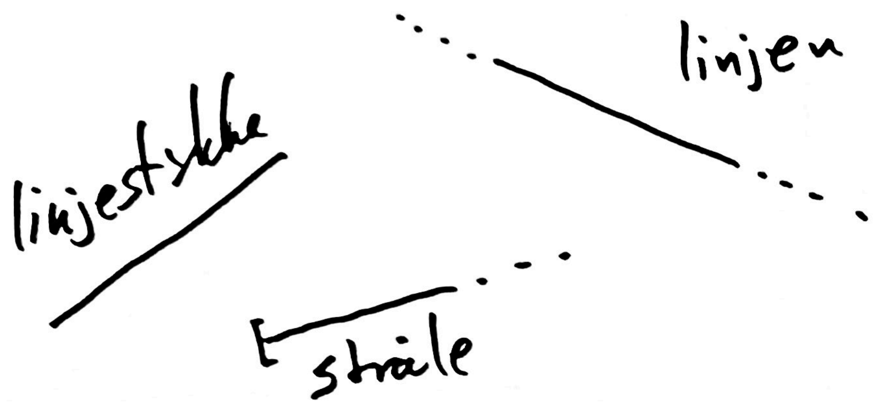
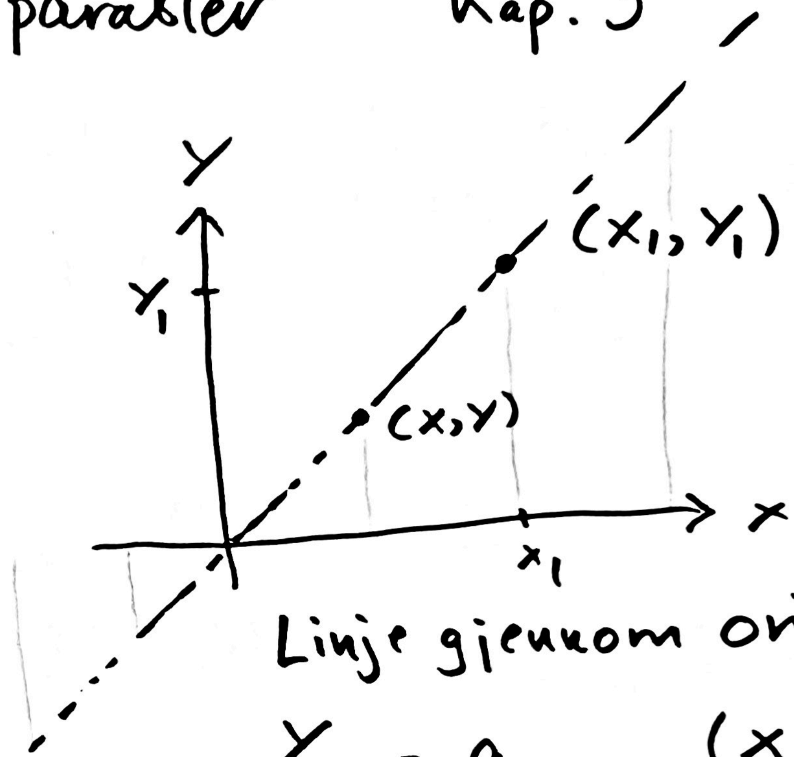
5 sep. 22 — Linjer og parabler — Kap. 3

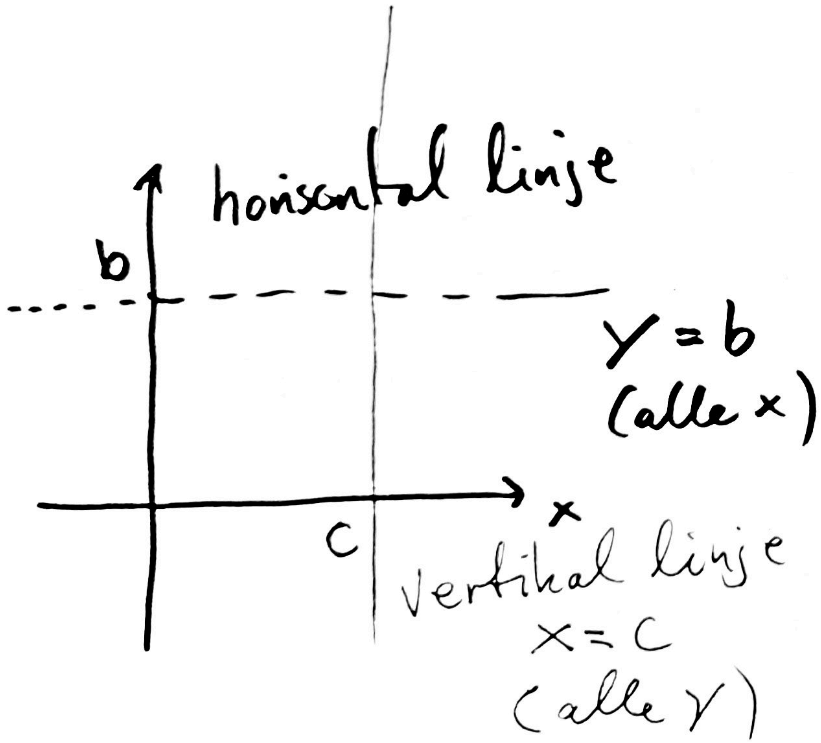




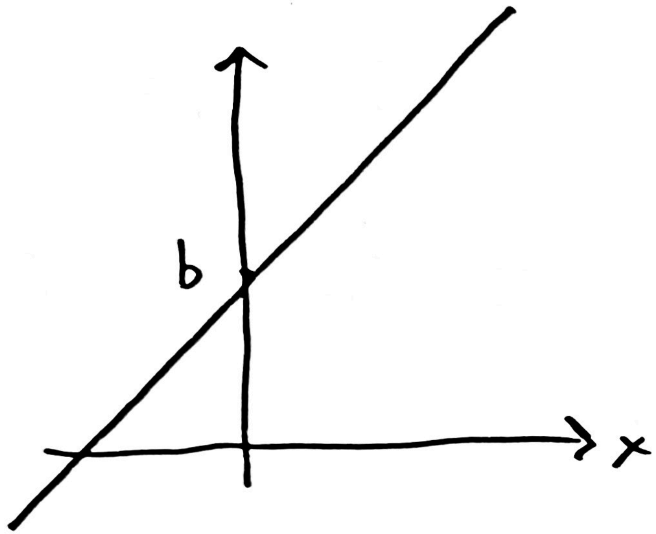
Linje gjennom origo

$$\frac{y}{x} = a \qquad (x \neq 0)$$

$$\underline{y = ax} \qquad \text{alle } x$$



Forskyver linjen langs x-aksen

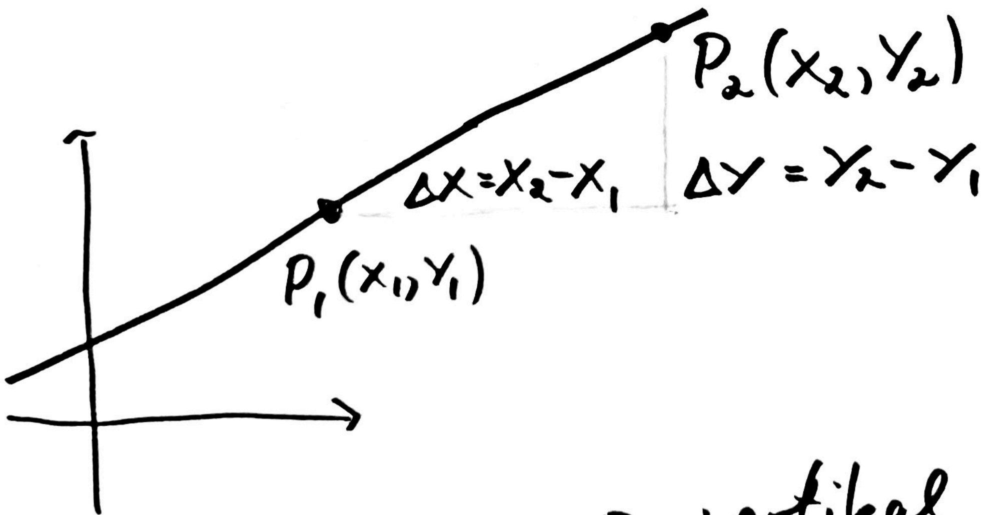


$y = ax + b$ skrå linje (ikke vertikale linjer)

$\uparrow$

stigningstallet

Det er akkurat én linje som går gjennom to forskjellige punkt



Stigningstallet er lik $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$(x_1 \neq x_2)$

En vertikal linje har ikke stigningstall.

Ex Likning for linjen gjennom $P_1(1,4)$
(Uttrykk) og $P_2(3,-2)$

Stigningstallet er lik $a = \frac{(-2)-4}{3-1} = \frac{-6}{2} = \underline{-3}$

$$y = ax + b = -3x + b$$

Setter inn $(1,4)$ og får

$$4 = -3 \cdot 1 + b$$
$$4 - (-3) = b$$
$$b = 7$$

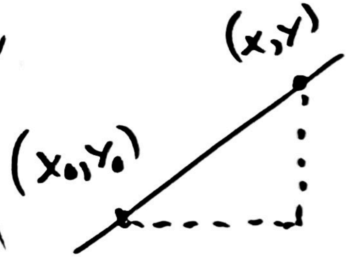
$$\underline{y = -3x + 7}$$

Ex Gitt stigningstall a og et punkt $P(x_0, y_0)$

Linje med stigningstall a som går gjennom P_0 er

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

Ettpunktsformelen.



$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a \quad \ldots$$

opg Hva er stigningstallet

a) $y = -10x + 3$

b) $y + 2 = 5(x - 3)$

c) $3y = 5 + 3x$

d) $y + x = 4 - 2x$

e) $x = 5$

Stigningstallene: a) $\underline{a = -10}$ b) $y = 5x - 17$

$\underline{a = 5}$

c) $y = x + \frac{5}{3}$ $\underline{a = 1}$

d) $y = 4 - 2x - x = \underline{-3x + 4}$ $a = -3$

e) vertikal linje, har ikke stigningstall.

Eks. Beskriv linjen parallell til $y = -2x + 5$ som går gjennom $P(3, 4)$.

$y = -2x + b$ og går gjennom $(3,4)$

$4 = -2 \cdot (3) + b$ så $b = 4 - (-6) = 10$

alternativt: $y = -2(x - 3) + 4 = -2x + 10$. $\underline{y = -2x + 10}$

opg Finn linjen gjennom $(-3,4)$ og $(0,3)$

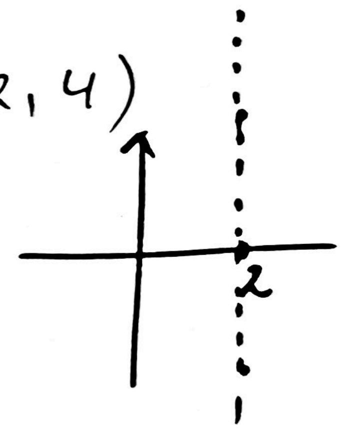
stigningstallet $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-3}{-3-0} = \frac{1}{-3} = \frac{-1}{3} = \underline{-\frac{1}{3}}$

$y = \frac{-1}{3}(x-0) + 3 = \underline{\frac{-1}{3}x + 3}$

opg Finn linjen gjennon $(2,-3)$ og $(2,4)$

x-verdiene er like, linjen er vertikal

$x = 2$

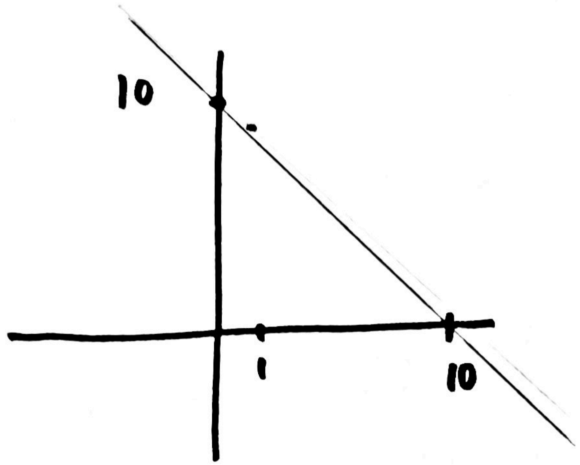


Stigningstallet til en linje gjennom (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

Tegn opp linjen

$y = 10 - x$



Alle linjer er gitt som løsningene til

$ax + b + cy = 0$

a eller c ulike 0.

$c \neq 0$ $\quad -cy = ax + b$ deler med $-c$

$y = \left(\frac{-a}{c}\right) x + \left(\frac{-b}{c}\right)$

skrå linje

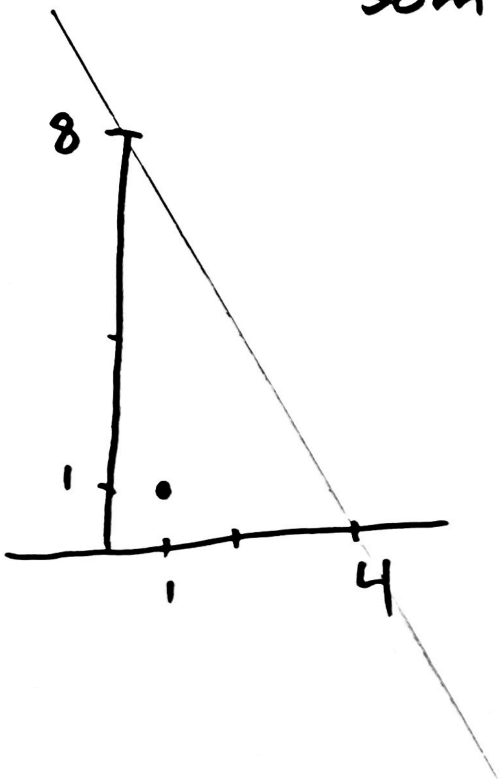
$c = 0$ $\quad ax + b = 0$ $\quad a \neq 0$

$x = \frac{-b}{a}.$

vertikal linje

opg

Finn linjen gjennom $(1,1)$ og som er parallell til linjen $y = -2x + 8$.



$y = -2x + b$

går gjennom $(1,1)$ når $1 = -2(1) + b$

$1 + 2 = b$

$\underline{b = 3}$

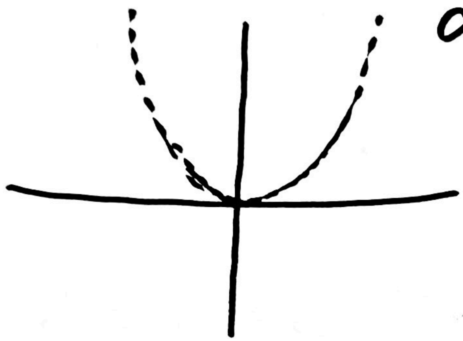
$$\boxed{y = -2x + 3}$$

Parabler

$$y = ax^2 + bx + c$$

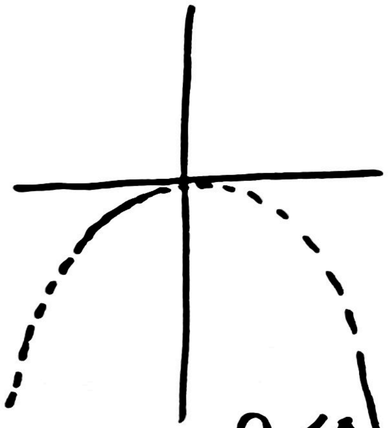
$(a \neq 0)$

$y = ax^2$



$a > 0$

$a = 0$



$a < 0$

$$a = 1 \quad \boxed{\begin{aligned} y &= x^2 + bx + c \\ &= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{aligned}}$$

Fullført kvadrat

Forskyvning av $y = x^2$

med $-\frac{b}{2}$ i x-retning

og $c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ i y-retning

mellomregning

$$(x+d)^2 = \underline{x^2 + 2dx} + d^2$$

$$d = b/2$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \underline{x^2 + bx} + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

så $x^2 + bx$

$$= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$ Faktorisering.

$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - d$, $d = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$

$d < 0$ ingen faktorisering

$d = 0$ $x^2+bx+c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$

$d > 0$ $x^2+bx+c = \left(\left(x + \frac{b}{2}\right) + \sqrt{d}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2}\right) - \sqrt{d}\right)$

$x^2+bx+c = 0$

ingen løsning $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c < 0$

ēn løsning $= 0$

$x = -b/2$

to løsninger $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$, $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c > 0$

Beskriv $y = x^2 + 4x - 5$ som en forskyvning av $y = x^2$

Faktoriser

$$x^2 + 4x - 5 = \underbrace{(x+2)^2}_{x^2+4x+2^2} - 2^2 - 5 = (x+2)^2 - 3^2$$

$$= ((x+2)+3)((x+2)-3) = \underline{(x+5)(x-1)}$$

Grafen til $x^2 + 4x - 5$ er grafen til $y = x^2$ forskyvd med -2 i x-retning
-9 i y-retning.

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$
$$(x+5)(x-1) = 0$$

Løsningene er $x = -5$ og $x = 1$.

opg

$$y = x^2 + 4x - 3$$
$$= (x+2)^2 - 3 - 4$$
$$= (x+2)^2 - 7$$
$$= (x+2)^2 - (\sqrt{7})^2$$
$$= (x+2+\sqrt{7})(x+2-\sqrt{7})$$

Beskriv grafen som en forskyvning av grafen til $y = x^2$.

Faktoriser.

Grafen er lik grafen til $y = x^2$ forskyvd -2 i x-retning
-7 i y-retning

$$x^2 + 4x - 3 = 0$$

$x + 2 + \sqrt{7} = 0$ eller $x + 2 - \sqrt{7} = 0$

Løsningene er $x = -2 - \sqrt{7}$
og $x = \underline{-2 + \sqrt{7}}$

Funksjoner

En funksjon i x er en tilordning av verdier for hver gyldig x.

Eks

$f(x) = 2x+3$ $\qquad x \in \mathbb{R} = D_f$

$g(x) = \sqrt{x}$ $\qquad \{x \mid x \geq 0\} = [0,\infty) = D_g$

Definisjonsmengden til en funksjon er mengden av verdier som funksjonen kan ta.
"gyldige verdier for funksjonen"

Funksjoner er ofte gitt ved et uttrykk
"formel i variabelen"

Den <u>naturlige definisjonsmengden</u> er alle verdier til variabelen slik at uttrykket gir mening.

$f(x) = \frac{1}{x-2}$

Naturlig def. mengde

$D_f = \mathbb{R} - \{2\} = \langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$

Nat. def. mengde $D_a = \mathbb{R}$

$$a(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

delt forskrift

$$h(x) = \begin{cases} 1/x-2 & x < 0 \\ \sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

nat def. mengde er $D_h = \mathbb{R}$

$p(n)$ = primtall nummer n

$D_p = \mathbb{N}$

$p(1) = 2$ $p(2) = 3$ $p(3) = 5$ $p(4) = 7$

$p(5) = 11$ ...

$p(n)$ er ikke gitt ved et funksjonsuttrykk.

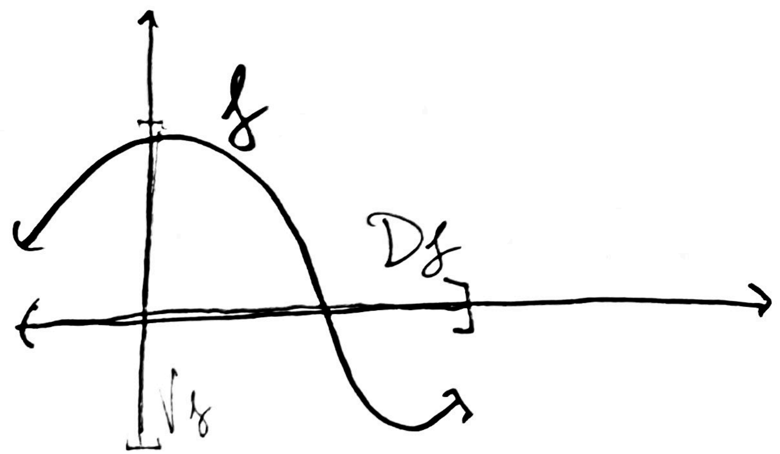
Løsninger til likningen $a^2 = x$ er ikke en funksjon i x:

$x < 0$ ingen løsning

$x = 0$ $a = 0$

$x > 0$ $a = \sqrt{x}$ og $a = -\sqrt{x}$.

Grafen til en funksjon består av alle punkt $(x, f(x))$ for $x \in D_f$



Verdimengden til $f(x)$, D_f

$$V_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$$

$f(x) = y = 2x+1$ $\quad D_f = \langle 0, 4]$

$V_f = \langle 1, 9]$

$D_g = \langle -\infty, 2]$

To forskjellige funksjoner

$g(x) = 2x+1$

$V_g = \langle -\infty, 5]$.