24.05.22

Algebra

* $2x + 3x = (2+3)x = 5x$

gyldig for alle x

* $x \cdot y \cdot x^2 \cdot y^3 = x \cdot x^2 \cdot y \cdot y^3 = x^3 y^4$

* $3x^2 - x = x(3x-1)$

* $x^2 y + xy^2 = xy(x+y)$

* $3x - 2(x-3) = 3x - (2x-6)$

$= 3x - 2x + 6 = (3-2)x + 6$

$= 1x + 6 = x + 6.$

Ganger ut parenteser (transitivitet)

$(x+2)(x+3) = (x+2)x + (x+2)3$

$= x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$

Motsatt, å gå fra x^2+5x+6 til $(x+2)(x+3)$ kalles å

faktorisere uttrykket.

Rasjonale uttrykk

$$\frac{x}{x} = 1 \text{ for alle } x \neq 0$$

ikke definert for $x = 0$.

$$\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)}{(x-1)} \cdot \frac{(x-1)}{(x+1)}$$

$$= \frac{x-1}{x+1} \text{ for alle } x \neq 1.$$

(hvor $x-1$ er lik 0)

Kvadratsetningen.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$= \underline{a^2 + 2ab + b^2}$$

Eksempel $11^2 = (10+1)^2 = 100 + 20 + 1 = 121$

$12^2 = (10+2)^2 = 100 + 40 + 4 = 144$

$13^2 = (10+3)^2 = 100 + 60 + 9 = 169$

$(14)^2 = (10+4)^2 = 100 + 80 + 16 = 196 \ldots$

$$(3a+7)^2 = (3a)^2 + 2(3a)\cdot 7 + 7^2$$
$$= 9a^2 + 42a + 49$$

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2$$
$$= a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2.$$

Resultat: $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ $\quad a, b > 0$

x^2 økende for $x > 0$

så påstanden er ekvivalent til

$$\left(\sqrt{a+b}\right)^2 < \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$$
$$a+b < \underbrace{\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b}}_{a+b+2\sqrt{a\cdot b}}$$

Dette er sant for alle $a, b > 0$.

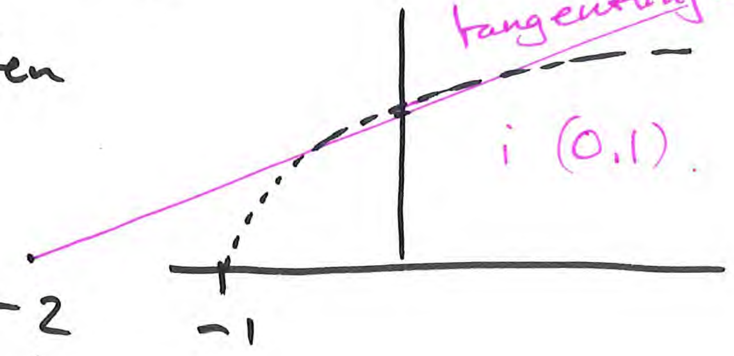
---

stort eksempel

Vi har tidligere sett at

$$\sqrt{1+x} \underset{\sim}{<} 1+\frac{x}{2}$$

for x liten



Vi forklarer hvorfor dette gir en god tilnærming algebraisk

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 = 1+2\cdot 1\cdot \frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$= 1+x+\frac{x^2}{4}$$

så $1+\frac{x}{2} = \sqrt{1+x+\frac{x^2}{4}}$

Når x er liten gir dette en god tilnærming til $\sqrt{1+x}$.

Vanskelig oppg. vis at $\sqrt{1+x} \sim 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$
x liten

Eksempel : $2 = 1.96+0.04$
$= 1.4^2+0.04$

$$\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{1.4^2\left(1 + \frac{0.04}{1.4^2}\right)} \qquad x = \frac{0.04}{1.4^2}$$

$$\sim 1.4\left(1 + \frac{x}{2}\right) = 1.4 + \frac{0.04}{2\cdot 1.4}$$

$$= 1.4 + \frac{1}{70} = \underline{1.4142}8\ldots$$

$$\sim 1.4\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)$$

$$= 1.4 + \frac{1}{70} - \frac{(0.04)^2}{8\cdot(1.4)^3}$$

$$= 1.4 + \frac{1}{70} - \frac{1}{40\cdot 7^3} = \underline{1.41421}28$$

Konjugatsetningen

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\Big((a+b)a + (a+b)(-b) = a^2 + ba - ab - b^2 = a^2 + (ab - ab) - b^2 = a^2 - b^2 \Big)$$

$$91 = 100 - 9 = 10^2 - 3^2 = (10+3)(10-3)$$

$$221 = 225 - 4 = 15^2 - 2^2 = (15+2)(15-2) = \underline{17 \cdot 13}$$

$$779 = 900 - 121 = 30^2 - 11^2 = \underline{41 \cdot 19}$$

Kvadrat og konjugatsetningene står det mer om i kap. 4 i boken

Tall på standard form

$\pm\, a \cdot 10^n \qquad 1 \leq a < 10$

$123{,}45 = 1{,}2345 \cdot 10^2$

$0{,}001432 = 1{,}432 \cdot 10^{-3}$

$12{,}\overbrace{345}^{\text{3 desimaler}}$

$\underbrace{12{,}345}_{\text{5 siffer}}$

Nøyaktigheten til et tall oppgir vi i antall gyldige siffer.

$1{,}0200 \cdot 10^3$ 5 gyldige siffer

$4321{,}58$ 6 gyldige siffer

$(= 4{,}32158 \cdot 10^3)$

0.0000320

$= 3.20 \cdot 10^{-5}$ 3 gyldige siffer.

23,45 betyr

$$20 + 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}$$

$$= 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 10^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{-2}$$

sifferet 3 gjentas

$$0.333\ldots = 0.\underline{3}$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \ldots$$

(grensen vi får når vi tar med flere og flere ledd)

Samme reelle tall kan beskrives med forskjellige desimaltall

For eksempel $0.9999\ldots = 1$.

Ganges to tall sammen legges den relative unøyaktigheten sammen :

$$\frac{a(1 \pm 0.01)\, b(1 \pm 0.01)}{a \cdot b}$$

$$= 1 \pm \underline{0.02} + 0.0004$$