22.08.22

Kvadratroten $\sqrt{a}$ er et ikke-negativt tall slik at $(\sqrt{a})^2 = 1$. $a \geq 0$

Det finnes bare ett slik tall.

Tilordningen : a sendes til $\sqrt{a}$ er en funksjon

$\sqrt{1} = 1$ $\quad$ $\sqrt{4} = 2$ $\quad$ $2^2 = 4$

$(-2)(-2) = (-2)^2 = 4$

$x^2 = 4$ løsningene er

$x = -2 = -\sqrt{4}$

$x = 2 = \sqrt{4}$

$\sqrt{9} = 3$ $\quad$ $\sqrt{25} = 5$ $\quad$ $\sqrt{0} = 0$

$\sqrt{-1}$ eksisterer ikke blant de reelle tallene.

$\sqrt{2}$ reelt tall som ikkje er rasjonalt

Anta $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ $\quad m, n \in \mathbb{N}$

$\sqrt{2} \cdot n = m$ kvadrerer

$$\underbrace{2 \cdot n^2}_{\text{odde antall 2-er faktorer}} = \underbrace{m^2}_{\text{jevnt antall 2-er faktorer}}$$

n^2 og m^2 har et jevnt (partals) antall 2-er faktorer.

$\lightning$ selvmotsigelse

Så antakelsen må være gal.

$\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

$$\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \qquad a, b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad b \neq 0$$

fordi $\big(\underbrace{\sqrt{a}\sqrt{b}}_{\geq 0}\big)^2 = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

$$= (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = a\cdot b.$$

så $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$ ...

$$\sqrt{(-3)(-12)} = \sqrt{36} = 6$$

$\big(\neq \sqrt{-3}\sqrt{-12}$ eksisterer ikke $\big)$

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ men } \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7.$$

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad a, b \geq 0$$

(like bare hvis $a\cdot b = 0$)

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2} < \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$$

Hva er $\sqrt{a^2}$?

$a \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} = |a| = \mathrm{abs}(a)$$

absoluttverdien til a

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{15} \quad \sqrt{10}$$

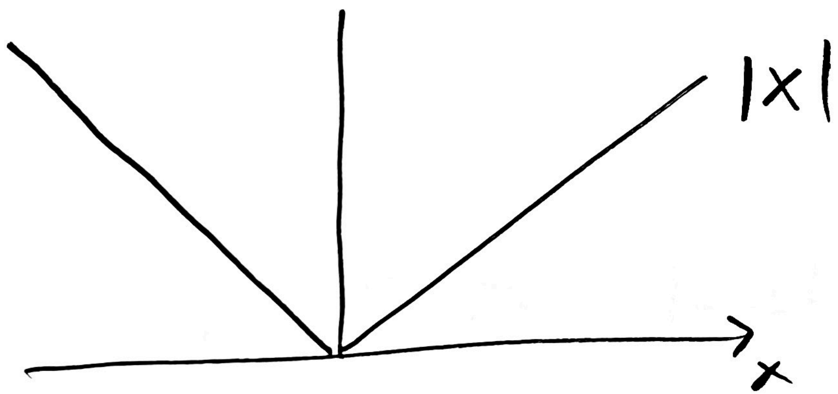
opg 1) Finn heltallet lik $\sqrt{(-7)^2}$

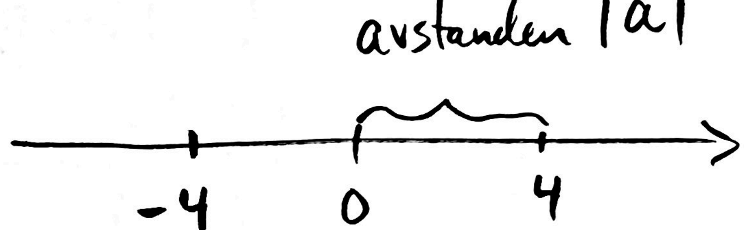
2) Finn

3) Finn en tilnærming til $\sqrt{224}$ (uten regnemaskin)

$|4| = 4$ $\quad |-5| = 5 \quad |0| = 0$

$|7| = 7 \quad |-7| = 7$





$$|-a| = |a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

1) $\sqrt{2\cdot 3}\sqrt{3\cdot 5}\sqrt{2\cdot 5} = \sqrt{2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 2} = \sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2}$

$= 2\cdot 3\cdot 5 = 30$

(Vanlig kommando for $\sqrt{\ }$ er sqrt( )
 - **(1/2)
 - ^(1/2))

2 $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$

3 $\sqrt{224}$

~ 15 (litt mindre)

$15\cdot 15$

$(10+5)(10+5) = \underline{225}$

$\sqrt{1+x} \sim 1+\frac{x}{2}$ x liten.

$$\sqrt{224} = \sqrt{225-1} = \sqrt{225\left(1-\frac{1}{225}\right)}$$

$$\simeq 15\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{225}\right)\right) \sim 15-\frac{15}{2\cdot 15^2} = 15-\frac{1}{30}$$

$$\sqrt{224} \sim 15 - 0.0333.. \sim 14.9666$$

Mer nøyaktig: 14.966629547...

$$\sqrt{3^5} = \sqrt{3^4 \cdot 3} = \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{3} = \underline{9\sqrt{3}}$$

$$= 3^2\sqrt{3}$$

$a \geq 0$

$$\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$$

$$\left(= \sqrt{a^2 \cdot a} = \sqrt{a^2}\sqrt{a} = |a|\sqrt{a} = a\sqrt{a} \right)$$

siden $a \geq 0$

<u>Tredje roten</u>

$\sqrt[3]{a}$ er tallet slik at

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a.$$

$a \in \mathbb{R}$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\left(\underbrace{(-2)(-2)}_{4}(-2) = 4 \cdot (-2) = -8 \right)$$

$$\left(\sqrt[3]{7}\sqrt{7}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{7}\right)^6 \cdot \left(\sqrt{7}\right)^6$$

$$= \left(\left(\sqrt[3]{7}\right)^3\right)^2 \cdot \left(\left(\sqrt{7}\right)^2\right)^3 = 7^2 \cdot 7^3 = 7^5$$

<u>n-te røtter</u>

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

n odde $\quad a \in \mathbb{R}$

n jevn $\quad a \geq 0$

og $\sqrt[n]{a} \geq 0$

$\sqrt[4]{16} = 2 \qquad \sqrt[4]{(-2)^4} = 2 = |-2|$ (benytter at $2^4 = 16$)

$\sqrt[5]{32} = 2 \qquad \sqrt[5]{-32} = -2$

i eksempelet ovenfor er da $\sqrt[3]{7}\sqrt{7} = \sqrt[6]{7^5}$

$\sqrt{}$ rotsymbolet

$\sqrt[3]{}$

$\sqrt[2]{} = \sqrt{}$

$\sqrt[3]{-27} = -3$

$\sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[4]{-81} =$ eksisterer ikke.

$\sqrt[4]{81} = 3$

$2 \cdot \sqrt{9}$
$= 6$

$\sqrt{9 \cdot 4}$
$= \sqrt{9}\sqrt{4}$
$= 6$

$\sqrt{9}\,4$
$= \sqrt{9} \cdot 4 = 3 \cdot 4$
$= 12$

alternativt $\sqrt{}(9 \cdot 4)$

Angir hva vi skal ta roten av ved å inneslutte uttrykket i roten eller bruke parenteser.

1 Finn om mulig $\sqrt{-36}$, eksisterer ikkje

$\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$

$(\sqrt{-6})^2$ eksisterer ikkje

2 Skriv som en rot $\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[3]{a}$ $\quad a \geq 0$

3 Estimer $\sqrt{119}$ $\quad (11^2 = 121)$

2. $(\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[3]{a})^{15} = a^3 \cdot a^5 = a^8$

Så $\sqrt[5]{a}\,\sqrt[3]{a} = \sqrt[15]{a^8}$

benytter $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2}$ for x liten.

$$\sqrt{119} = \sqrt{121-2} = \sqrt{11^2\left(1 - \frac{2}{11^2}\right)} = 11\sqrt{1 + \frac{-2}{11^2}}$$

$$\simeq 11\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{11^2}\right)\right) = 11 - \frac{1}{11} = 11 - 0.0909\ldots$$

$$= 10.90909$$

(eksakt: 10.9087121 1....)

Potenser

a^n ← eksponent

a grunntall

Potensregler

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Utvida

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0 \qquad a^{-n} \cdot a^n = a^0 = 1$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \qquad \frac{2^3 \cdot 2^4}{2^5} = 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^{-5} = 2^{3+4-5} = 2^2$$

$$2^{-5} = 2^{(-1)\cdot 5} = (2^{-1})^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= (2^5)^{-1} = \frac{1}{2^5}$$

Hva må $a^{1/2}$ være?

$$(a^{1/2})^2 = a^{(1/2 \cdot 2)} = a^1 = a$$

$$(a^{1/n})^n = a^1 = a$$

Hvis potensreglene fortsatt skal være gyldige må

$$\underline{a^{1/n} = \sqrt[n]{a}} \qquad a \geq 0$$

$$\sqrt[3]{a}\sqrt{a} = a^{1/3} a^{1/2} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = a^{5/6}$$

$$= (a^5)^{1/6} = \sqrt[6]{a^5}$$

$$= (a^{1/6})^5 = (\sqrt[6]{a})^5.$$

$$\sqrt{a^2} = (a^2)^{1/2} = a^{2\cdot\frac{1}{2}} = a^1 = a \qquad a \geq 0$$

$$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^3} = (a^2)^{1/3} \cdot (a^3)^{1/5}$$

$$= a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{5}}$$

$$= a^{\frac{10}{15}+\frac{9}{15}} = a^{19/15} = \sqrt[15]{a^{19}}$$

$$= \sqrt[15]{a^{15}\cdot a^4} = \underline{a\sqrt[15]{a^4}}$$

opg $$\frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{(a^2)^{1/5}}{a^{1/3}} = a^{2/5} \cdot (a^{1/3})^{-1}$$

$$= a^{2/5} \cdot a^{-1/3} = a^{\frac{2}{5}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{6}{15}-\frac{5}{15}} = a^{1/15}$$

$$= \underline{\sqrt[15]{a}}$$

$$\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}$$
$$= b \cdot a^{-1}$$

$$\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^4}} = a^2 \cdot \left(\sqrt[3]{a^4}\right)^{-1}$$
$$= a^2 \left(\left(a^4\right)^{1/3}\right)^{-1}$$
$$= a^2 \cdot a^{-4/3} = a^{2-4/3}$$
$$= a^{(6-4)/3} = a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2}$$
$$= \left(\sqrt[3]{a}\right)^2$$

$$a^{2/3} = a^{4/6}$$
$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 = \left(\sqrt[6]{a}\right)^4 \quad a \geq 0$$

Detaljer:

$$2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{1} - \frac{4}{3}$$

utvider med 3

$$\frac{2 \cdot 3}{3} - \frac{4}{3} = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}$$

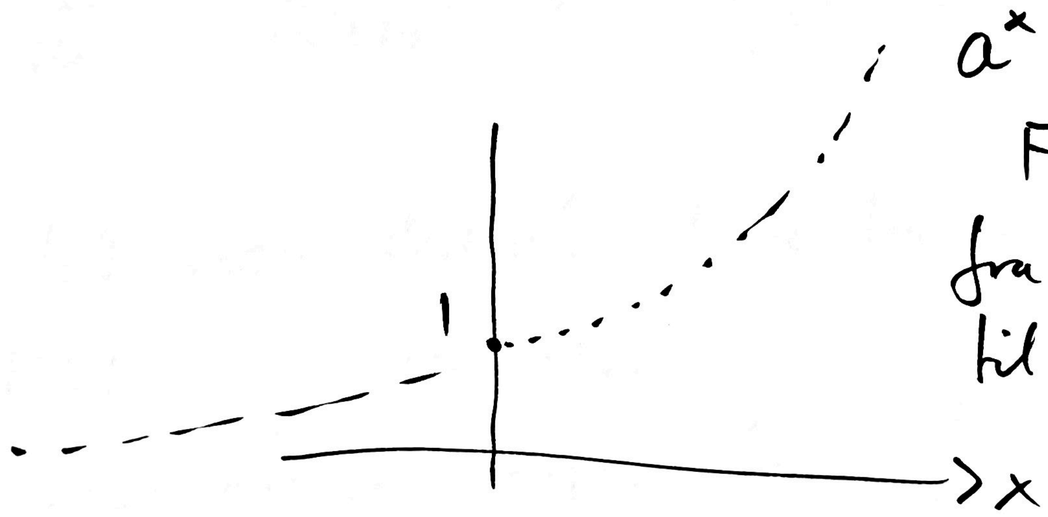
$3^{\sqrt{2}}$

tilnærmer $\sqrt{2}$ med rasjonale tall

$x_1, x_2, x_3 \ldots$ nærmer seg $\sqrt{2}$.

$3^{x_1}, 3^{x_2}, 3^{x_3}, \ldots$ nærmer seg et tall.

Det tallet er $3^{\sqrt{2}}$



Fyller ut grafen fra x rasjonale tall til alle reelle tall

Ekstra
(Vanskelig)

Desimaltall

$0.12453\ldots$

$= 0.1 + 2 \cdot 0.01 + 4 \cdot 0.001 + 5 \cdot 0.0001 + 3 \cdot 0.00001\ldots$

$= \frac{1}{10} + 2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \cdots$

se på reelle tall med desimaler bare lik 0 og 1

$S = \{ 0.01001 \quad 0.1111\ldots \quad 0.001 \}$

Disse desimaltallene representerer forskjellige reelle tall.

Anta $\mathbb{R}$ kan telles. Da kan mengden S også telles.

Det finnes da en funksjon $\mathbb{N} \xrightarrow{f} S$

alle tall i S er da på formen $f(n)$ for et naturlig tall n.

Lager oss et tall x i S slik at desimal nummer n er lik $\begin{cases} 0 & \text{hvis } \overbrace{f(n)_n}^{\text{desimal nummer } n} = 1 \\ 1 & \text{— } f(n)_n = 0 \end{cases}$

Da kan ikke x være lik $f(m)$ for noen m.

Siden m-te desimal i x

$$x_m \neq (f(m))_m.$$

Så $\mathbb{R}$, de reelle tall, er ikke tellbare.

Eksempler

$$\sqrt{243} = \sqrt{3 \cdot 81} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{81} = \underline{9\sqrt{3}}.$$

Estimering

$$\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2} \qquad x \text{ liten}$$

$$\sqrt{103} \sim 10 \text{ (litt større)}$$

$$\sqrt{100+3} = \sqrt{100\left(1+\frac{3}{100}\right)} = 10\sqrt{1+\frac{3}{100}}$$

$$\sim 10\left(1+\frac{1}{2}\frac{3}{100}\right) = 10 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{10} = \underline{10{,}15}$$

$$\left(\sqrt{103} \sim 10.14889\ldots\right)$$

opg

$$\sqrt{2} = \sqrt{1.96 + 0.04} = \sqrt{(1.4)^2\left(1 + \frac{0.04}{(1.4)^2}\right)}$$

$$= 1.4 + \frac{0.02}{1.4} = 1.4 + \frac{0.1}{7} \sim \underline{1.4142857}$$

$$\sqrt{2} \sim 1.4142135$$