Innlevering	Fork1100 - Matematikk forkurs OsloMet
	Obligatorisk innlevering 3
Innleveringsfrist	Fredag 19. november 2021
Antall oppgaver:	15

1

Bestem vinkelen mellom vektorene $\vec{u} = [2, 7]$ og $\vec{v} = [4, -6]$. Hva er vinkelen mellom to linjer parallelle til vektorene?

LF: Vinkelen θ er gitt ved

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Vi har at absoluttverdiene til vektorene er

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$$

og

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{52}$$

Skalarproduktet er $\vec{u} \bullet \vec{v} = 2 \cdot 4 + 7 \cdot (-6) = -34$.

Vinkelen mellom vektorene er dermed tilnærmet lik

$$\arccos\left(\frac{-34}{\sqrt{53}\sqrt{52}}\right) = \underline{130.36^\circ}$$

Vinkelen mellom to linjer parallelle til vektorene er tilnærmet lik

$$180^\circ - 130.36^\circ = \underline{49.64^\circ}$$

2

Vi har gitt to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ slik at $|\vec{a}| = 4$ og $|\vec{b}| = 5$ samt at vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 120 grader. Bestem lengden til følgende vektorer og bestem vinkelen mellom dem

$$\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \qquad \text{og} \qquad \vec{v} = -\vec{a} + \vec{b}$$

LF: Vi kan uttrykke både absoluttverdien til vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ og skalarproduktet mellom vektorene ved hjelp av absoluttverdiene til vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ og skalarproduktet mellom dem. Vi har at

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(120^\circ) = 4 \cdot 5 \cdot (-1/2) = -10$$

$$|\vec{u}|^2 = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \bullet (2\vec{a} + 3\vec{b}) = 2^2|\vec{a}|^2 + 3^2|\vec{b}|^2 + 2 \cdot (2 \cdot 3)\vec{a} \bullet \vec{b}$$

$$= 4 \cdot 4^2 + 9 \cdot 5^2 + 12 \cdot (-10) = 64 + 225 - 120 = 169$$

Derfor er $|\vec{u}| = \sqrt{169} = 13$. Tilsvarende er

$$|\vec{v}|^2 = (-\vec{a} + \vec{b}) \bullet (-\vec{a} + \vec{b}) = (-1)^2|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot (-1)\vec{a} \bullet \vec{b}$$

$$= 4^2 + 5^2 - 2 \cdot (-10) = 16 + 25 + 20 = 61$$

Så $|\vec{v}| = \sqrt{61}$.

Skalarproduktet er gitt ved

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \bullet (-\vec{a} + \vec{b}) =$$

$$2(-1)|\vec{a}|^2 + 3|\vec{b}|^2 + (2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1))\vec{a} \bullet \vec{b} =$$

$$-2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 5^2 - (-10) = -32 + 75 + 10 = 53$$

Vi har at vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt ved

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\frac{53}{13 \cdot \sqrt{61}}\right) = \underline{58.53373°}$$

3

Gitt to ikkje-parallelle vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. De utspenner en trekant ved å la ene hjørne være origo og de to andre hjørnene A og B være gitt ved $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ og $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. La P være punktet midt mellom origo og A og la Q være punktet mellom A og B slik at AQ er halvparten så lang som QB. Vis at linjene mellom B og P treffer linjen gjennom origo og Q i akkurat ett punkt S. Uttrykk vektoren $\overrightarrow{OS}$ ved hjelp av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

(Tegn gjerne en figur for typiske vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$.)

LF: Vi har at

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

Siden AQ er halvparten så lang som QB, så er AQ en tredel så lang som AB. Vi har derfor at

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

Derfor er

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \vec{a} + \frac{1}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}$$

Vektoren fra P til B er $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$. Linjen gjennom origo og Q er derfor parametrisert som

$$s\overrightarrow{OQ} = s\left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}\right)$$

og linjen gjennom B og P er parametrisert som

$$\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{PB} = \vec{b} + t\left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

De to linjene møtes når

$$s\left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}\right) = \vec{b} + t\left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

Vi samler ledd med $\overrightarrow{a}$ og $\overrightarrow{b}$ sammen

$$\left(\frac{s}{3} - t - 1\right)\overrightarrow{b} + \left(\frac{2s}{3} + \frac{t}{2}\right)\overrightarrow{a} = 0$$

Siden de to vektorene er linært uavhengige så er dette mulig hvis og bare hvis koffisientene til både $\overrightarrow{a}$ og $\overrightarrow{b}$ er null. Dette gir oss

$$\frac{s}{3} - t - 1 = 0 \qquad \text{og} \qquad \frac{2s}{3} + \frac{t}{2} = 0$$

Den andre likningen gir at $t = -4s/3$. Setter vi dette inn i den første likningen får vi

$$\frac{s}{3} - \frac{-4s}{3} - 1 = 0 \qquad \text{som gir} \qquad \frac{5s}{3} = 1$$

Derfor er $s = 3/5$ og

$$\overrightarrow{OS} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{a}\right) = \underline{\frac{1}{5}\overrightarrow{b} + \frac{2}{5}\overrightarrow{a}}$$

4

Finn volumet til tetraederet med hjørner $\mathcal{O}(0,0,0)$, $P(1,-3,5)$, $Q(2,0,6)$ og $R(4,24,-2)$.

LF:Volumet til tetraederet er lik en sjettedel av absoluttverdien til trippelproduktet av vektorene $\overrightarrow{\mathcal{O}P}$, $\overrightarrow{\mathcal{O}Q}$ og $\overrightarrow{\mathcal{O}R}$.

Trippelproduktet er lik

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 24 & -2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 12 & -1 \end{vmatrix} = 4(-36 - (-3(-1-6)) + 60) = 4 \cdot 3 = 12.$$

Denne første likheten kommer av at trippelproduktet er lineært i hver vektor variabel. Vi konkluderer med at volumet til tetraederet er lik $12/6 = \underline{2}$.

5

a) Finn en likning som beskriver (har løsning som er) planet vinkelrett på vektoren $[-2,0,5]$ og som inneholder punktet P med koordinater $(-2,4,1)$.

LF: Punktet (x,y,z) ligger i planet hvis og bare hvis

$$[-2,0,5] \bullet [x,y,z] = [-2,0,5] \bullet [-2,4,1].$$

En likning er gitt ved

$$\underline{-2x + 5z = 9}.$$

b) Finn en likning som beskriver planet som inneholder punktet $(1.381, 5.834, 39.110)$ og som er vinkelrett på vektoren $\overrightarrow{u} = [0.735, -2.879, 0.088]$.

LF: En likning er gitt ved

$$\underline{0.735x - 2.879y + 0.088z = -12.339371}.$$

6

To plan i rommet er gitt ved $2x - y + 3z = 12$ og ved $x + 5y - 2z = -3$. De to planene snitter i en linje. Det vil si at punktene de har til felles er en linje. Parametriser denne linjen.

LF: Linjen må stå normalt på normalen til begge plana. Defor er den parallell til kryss-produktet mellom normalvektoren. Dette er lik

$$[2, -13] \times [1, 5, -2] = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = [-13, 7, 11].$$

Vi finner et punkt som ligger i begge planenen. Det vil si et punkt (x, y, z) slik at begge likningene er oppfylt. Ved for eksempel å sette $z = 0$ avgrenser vi oss til å finne x og y slik at likningene $2x - y = 12$ og $x + 5y = -3$ (hvis det finnes en løsning hvor $z = 0$). Ved å løse likningsettet (for eksempel sette inn $y = 2x - 12$ i den andre likningen) får vi punktet $(57/11, -18/11, 0)$.

Dette gir følgende parametrisering av linjen som er snittet mellom de plana

$$\begin{aligned} x &= (57/11) - 13t \\ y &= -(18/11) + 7t \\ z &= 11t \end{aligned}$$

for reelle tall t.

7

Finn alle plan som er utspent av vektorene $\vec{a} = [1, 2, -3]$ og $\vec{b} = [-2, -4, -6]$. og som har korteste avstand til origo lik 5. Plana skal beskrives ved en likning.

LF: En normalvektor til alle plan utspent av de oppgitte vektorene er $\vec{n} = [2, -1, 0]$. Denne vektoren har lengde $|\vec{n}| = \sqrt{5}$. Punktet P nærmest origo, $\mathcal{O}$, på et plan som er vinkelrett på $\vec{n}$ har egenskapen at $\overrightarrow{\mathcal{O}P}$ er parallell til normalvektoren $\vec{n}$. De plana med (korteste) avstand lik 5 fra origo inneholder derfor punktene P slik at $|\overrightarrow{\mathcal{O}P}| = 5$ og $\overrightarrow{\mathcal{O}P}$ er parallell til $\vec{n}$. Dette er vektorene $5\vec{n}/|\vec{n}| = \sqrt{5}\vec{n}$ og $-\sqrt{5}\vec{n}$. Dette gir punktene $P_1 = \sqrt{5}(2, -1, 0)$ og $P_2 = -\sqrt{5}(2, -1, 0)$.

Det er to plan med de oppgitte egenskapene og de er gitt ved

$$2x - y = 5\sqrt{5} \quad \text{og} \quad 2x - y = -5\sqrt{5}.$$

8

Vi har gitt tre punkt A, B og C i rommet med koordinater henholdsvis $(1, 0, 0)$, $(0, 3, 2)$ og $(1, 3, -3)$.

a) Finn vinkelen $\angle ABC$

b) Finn en parametrisering av planet som inneholder de tre punktene A, B og C.

c) Finn en likning for planet i b) og bestem arealet til trekanten ABC.

LF:

a) Vi har at $\overrightarrow{BA} = [1, -3, -2]$ og $\overrightarrow{BC} = [1, 0, -5]$. Derfor er kvadratet av lengdene gitt ved

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = 1^2 + (-3)^2 + (-2)^2 = 14 \qquad \text{og} \qquad |\overrightarrow{BC}|^2 = 1^2 + 0 + (-5)^2 = 26$$

Skalarproduktet mellom vektorene er

$$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = 1 + 0 + (-2) \cdot (-5) = 11$$

Vi finner vinkelen

$$\arccos\left(\frac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|}\right) = \frac{11}{\sqrt{14 \cdot 26}} = 54.79128^\circ$$

b) Vi finner to lineært uavhengige vektorer i planet $\overrightarrow{AB} = [-1, 3, 2]$ og $\overrightarrow{AC} = [0, 3, -3]$. En parametrisering er gitt ved

$$\begin{aligned} x &= 1 - s \\ y &= 3s + 3t \\ z &= 2s - 3t \end{aligned}$$

for reelle tall s og t.

c) Vektoren $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ står vinkelrett på planet. Denne vektoren er lik $-3[5, 1, 1]$. Vi velger normalvektoren $[5, 1, 1]$. En likning for planet er derfor

$$5x + y + z = 5.$$

9

Finn korteste avstand mellom punktet $P(1, -4, -5)$ og linjen som går gjennom punktet $A(1, 1, -1)$ og som har retningsvektor $\mathbf{r} = [1, 2, 0]$.

LF: Vektoren fra A til P er lik $\mathbf{v} = [1, 1, -1] - [1, -4, -5] = [0, 5, 4]$. Komponenten til vektoren fra A til P langs retningsvektoren $\mathbf{r}$ er gitt ved

$$\frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}\mathbf{r} = \frac{10}{5}\mathbf{r} = 2\mathbf{r}$$

Vi får da at komponenten til $\mathbf{v}$ vinkelrett på linjen er gitt ved

$$\mathbf{v} - 2\mathbf{r} = [0, 5, 4] - 2[1, 2, 0] = [-2, 1, 4]$$

Avstanden mellom P og linjen er lengden til denne vektoren

$$|[-2, 1, 4]| = \sqrt{4 + 1 + 16} = \underline{\sqrt{21} \approx 4.58}$$

10

a) Finn den korteste avstanden mellom linjene parametrisert ved

$$[2,2,3]t+[1,2,3]$$

for reelle t, og ved

$$[4,1,-5]s+[1/2,1/3,-2]$$

for reelle s.

b) Finn endepunktene til det korteste linjestykke mellom linjene (det er det samme som et punkt på hver linje slik at avstanden mellom dem er minst mulig.)

LF: Avstanden er kortes når linjestykket mellom linjene står rett på begge linjene. La $\overrightarrow{a}=[2,2,3]$ og $\overrightarrow{b}=[4,1,-5]$.

La C være et punkt på den første linjen og D være et punkt på den andre linjen. Vi har da at CD er kortest når vektoren $\overrightarrow{CD}$ er vinkelrett på både $\overrightarrow{a}$ og $\overrightarrow{b}$. Vi har derfor at

$$\overrightarrow{CD}$$

må være parallell til kryssproduktet

$$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 2 & 3\\ 4 & 1 & -5\end{vmatrix}=[-13,22,-6]$$

Vi setter nå opp likningen vi får ved å gå fra et punkt fra den første linjen til den andre linjen via en skalar u ganget med $\overrightarrow{n}$.

$$[2,2,3]t+[1,2,3]+u[-13,22,-6]=[4,1,-5]s+[1/2,1/3,-2]$$

Dette gir likningssystemet

$$\begin{array}{cccrr} 2t & -4s & -13u & = & -1/2\\ 2t & -s & +22u & = & -5/3\\ 3t & +5s & -6u & = & -5\end{array}$$

Løsningene er $t\simeq-1.0237$, $s=-0.3860$ og $u=-0.000241896$.

Avstanden mellom linjene er lik

$$|u\overrightarrow{n}|\simeq\underline{0.006349}$$

Vektoren fra origo til punktet på den første linjen er

$$[2,2,3](-1.0237)+[1,2,3]=\underline{[-1.047,-0.047,-0.0711]}$$

Vektoren fra origo til punktet på den andre linjen er

$$[4,1,-5](-0.3860)+[1/2,1/3,-2]=\underline{[-1.044,-0.052,-0.069]}$$

En enklere måte å regne ut avstanden mellom linjene er å finne en felles normalvektor mellom dem og så ta absoluttverdien til komponenten til en vilkårlig vektor mellom punkt, ett på hver linje, langs denne normalvektoren. Hvis vi velger punktet $P(1,2,3)$ på den første linjen og punktet $Q(1/2,1/3,-2)$ på den andre linjen så finner vi at avstanden er absoluttverdien til

$$\overrightarrow{QP} \bullet \vec{n}/|\vec{n}| = [-13,22,-6] \bullet [1-1/2, 2-1/3, 3-(-2)]/\sqrt{(-13)^2+22^2+(-6)^2}| =$$

$$\frac{(-39+220-180)/6}{\sqrt{169+484+36}} = \frac{1}{6\sqrt{689}} \simeq 0.006349$$

Følger og rekker

11

Finn summen til de aritmetiske rekkene

$$a) \qquad 5+7+\cdots+37$$

LF: Vi kan benytte at summen av de første n oddetallene er lik n^2. Tallet 37 er oddetall nummer 19 (siden $2\cdot 19-1=37$). Så summen er lik

$$19^2-(1+3) = (20-1)^2-4 = 400-2\cdot 20+1-4 = \underline{357}$$

$$b) \qquad 4+12+20+\cdots+100$$

LF: Dette er summen av $4+8n$ fra $n=0$ til $n=12$. Summen er da

$$\sum_{n=0}^{12}(4+8n) = 13\cdot 4+8\cdot\frac{13\cdot 12}{2} = 13\cdot(4+8\cdot 6) = 13\cdot 52 = 13\cdot 50+2\cdot 13 = 650+26 = \underline{676}$$

$$c) \qquad -100-98-96-\cdots-82$$

LF: Summen er lik

$$\sum_{i=1}^{10} -(80+2i) = -\left(10\cdot 80+2\frac{11\cdot 10}{2}\right) = -(800+110) = \underline{-910}$$

12

Hvor mange ledd må dere ha med i en aritmetisk rekke som starter med 1 og hvor etterfølgende ledd øker med 3 for at summen skal bli nærmest mulig 1000? Hva er summen da?

$$1+4+7+10+13+\cdots+(3n-2)$$

LF: Summen med n ledd er lik

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}(3i-2) = 3\frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Når n er mye større enn 1 er dette tilnærmet lik $3n^2/2$, Vi bruker dette estimatet til å finne omtrentlige verdi for n når summen er rundt 1000. Vi løser likningen $3n^2/2 = 1000$ og får $n \approx \sqrt{2000/3} = 25.8$. Nå setter vi inn verdier rundt 25 og sjekker.

$$S_{25} = 25\frac{75-1}{2} = 25\cdot 37 = 925 \qquad S_{26} = S_{25}+3\cdot 26-2 = 1001$$

Vi ser derfor at summen er nærmest 1000 når vi har <u>26 ledd og summen er da lik 1001</u>.

13

Finn summen til rekkene som en funksjon av n

$$a) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{2n}}{3^n}$$

$$b) \qquad \sum_{i=1}^{n} (-1)^i i$$

$$c) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)}$$

LF: a) Leddene er uavhenige av i, så derfor får vi at summen er lik

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^{2n}}{3^n} = n\frac{2^{2n}}{3^n} = n\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Dette var en litt ukonvensjonell oppgave. Her er forslag til løsning hvis dere har tolket oppgaven som følger:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^{2i}}{3^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(2^2)^i}{3^i} = \frac{4}{3}\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{3}\right)^i = \frac{4}{3} \cdot \frac{1-(4/3)^n}{1-4/3} = \underline{4((4/3)^n - 1)}$$

$$b) \qquad \sum_{i=1}^{n} (-1)^i i$$

Sum av to etterfølgende ledd er lik

$$(-1)^i i + (-1)^{i+1}(i+1) = (-1)^i(i-(i+1)) = -(-1)^i$$

Vi får da at summen er lik:

1. $\underline{n/2 \text{ hvis } n \text{ er et partall}}$
2. $\underline{(n-1)/2 - n = -(n+1)/2 \text{ hvis } n \text{ er et odddetall}}$.

$$c) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}\right)$$

Dette er lik

$$\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}$$

for alle $n \geq 1$.

14

a) Beskriv det rasjonale tallet

$$0.123123123\ldots = 0.\underline{123}$$

som en brøk.

LF: Det er lik

$$123 \cdot 0.001001001\ldots = 123\sum_{i=1}^{\infty} 0.001^i = 123 \cdot 0.001 \cdot \frac{1}{1-0.001} = \frac{123}{999} = \underline{\frac{41}{333}}$$

b) Hva må x være for at den uendelige geometrise rekken

$$x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

skal konvergere til 2?

LF: Summe til rekken konvergerer bare hvis $|x| < 1$. Summen er da lik $x^2/(1-x)$. Denne summen er lik 2 presis når $x^2/(1-x) = 2$. Dette gir annengradslikningen

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 3$$

Dette gir røttene $x = -1 \pm \sqrt{3}$. Løsningen $-1-\sqrt{3}$ har ikke absoluttverdi under 1 så den er ikke gyldig. Vi får da løsningen $\underline{x = \sqrt{3} - 1 \approx 0.73}$.

c) Vi setter inn 1000 kr hvert år fra 1.1.2022 til og med 1.1.2030. Hvor mye penger har vi på kontoen ved utgangen av 2040 hvis årlig rente i hele perioden er 10%?

LF: Vi setter inn penger 9 ganger. Pengemengden 1.1.2030 er da lik

$$\sum_{i=0}^{8} 1000(1+0.1)^i = 1000\frac{1.1^9 - 1}{0.1} = 10000(1.1^9 - 1)$$

Deretter står pengene i banken i 10 år. Pengemengden ved *utgangen* av 2040 er da lik

$$\underline{10000(1.1^9 - 1)(1.1)^{10} = 35222 \text{ kroner}}$$

d) Finn summen av inversen til alle naturlige tallene som bare er delelige med primtallene 2, 3 og 5. Det vil si finn summen av alle tall på formen

$$\frac{1}{2^k 3^l 5^m}$$

for $k, l, m \geq 0$. Ordnet etter avtagende størrelse ser rekken ut som

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \cdots$$

LF: Dette er produktet av de tre uendelige geometriske rekkene

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^i\right) =$$

$$\frac{1}{1-1/2} \cdot \frac{1}{1-1/3} \cdot \frac{1}{1-1/5} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \underline{\frac{15}{4} = 3.75}$$

15

Finn konvergensområde til de to potensrekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^{(2n+1)}}{2^{n+3}}$$

Den første rekken har konvergensradius 1. Dette ser vi ved å sammenligne med den geomtriske rekken $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Rekken konvergerer for $x = 1$ og for $x = -1$, så konvergensområdet er lik $[-1, 1]$. Dette vet vi fordi vi har tidligere sett at rekken når $x = 1$ konvergerer til et tall mellom 1 og 2. (Dette tallet viser seg å være $\pi^2/6$.) Tilsvarende for $x = -1$.

Den andre rekken er lik

$$\frac{3x}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^{2n}}{2^n} = \frac{3x}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(3x)}{\sqrt{2}} \right)^{2n}$$

Vi sammenligner med den geometrise rekken og ser at denne rekken konvergerer når $|3x/\sqrt{2}| < 1$. Rekken konvergerer derfor for $|x| < \sqrt{2}/3$.