

Innlevering            Fork1100 - Matematikk forkurs OsloMet  
                                 Obligatorisk innlevering 3  
Innleveringsfrist    Fredag 19. november 2021  
Antall oppgaver:    15

## 1

Bestem vinkelen mellom vektorene  $\vec{u} = [2, 7]$  og  $\vec{v} = [4, -6]$ . Hva er vinkelen mellom to linjer parallelle til vektorene?

## 2

Vi har gitt to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  slik at  $|\vec{a}| = 4$  og  $|\vec{b}| = 5$  samt at vinkelen mellom  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er 120 grader. Bestem lengden til følgende vektorer og bestem vinkelen mellom dem

$$\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \quad \text{og} \quad \vec{v} = -\vec{a} + \vec{b}$$

## 3

Gitt to ikkje-parallele vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ . De utspenner en trekant ved å la ene hjørne være origo og de to andre hjørnene  $A$  og  $B$  være gitt ved  $\vec{OA} = \vec{a}$  og  $\vec{OB} = \vec{b}$ . La  $P$  være punktet midt mellom origo og  $A$  og la  $Q$  være punktet mellom  $A$  og  $B$  slik at  $AQ$  er halvparten så lang som  $QB$ . Vis at linjene mellom  $B$  og  $P$  treffer linjen gjennom origo og  $Q$  i akkurat ett punkt  $S$ . Uttrykk vektoren  $\vec{OS}$  ved hjelp av  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ .

(Tegn gjerne en figur for typiske vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ .)

## 4

Finn volumet til tetraederet med hjørner  $O(0, 0, 0)$ ,  $P(1, -3, 5)$ ,  $Q(2, 0, 6)$  og  $R(4, 24, -2)$ .

## 5

- Finn en likning som beskriver (har løsning som er) planet vinkelrett på vektoren  $[-2, 0, 5]$  og som inneholder punktet  $P$  med koordinater  $(-2, 4, 1)$ .
- Finn en likning som beskriver planet som inneholder punktet  $(1.381, 5.834, 39.110)$  og som er vinkelrett på vektoren  $\vec{u} = [0.735, -2.879, 0.088]$ .

## 6

To plan i rommet er gitt ved  $2x - y + 3z = 12$  og ved  $x + 5y - 2z = -3$ . De to planene snitter i en linje. Det vil si at punktene de har til felles er en linje. Parametriser denne linjen.

## 7

Finn alle plan som er utspent av vektorene  $\vec{a} = [1, 2, -3]$  og  $\vec{b} = [-2, -4, -6]$ . og som har korteste avstand til origo lik 5. Planene skal beskrives ved en likning.

## 8

Vi har gitt tre punkt  $A, B$  og  $C$  i rommet med koordinater henholdsvis  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 3, 2)$  og  $(1, 3, -3)$ .

- Finne vinkelen  $\angle ABC$
- Finne en parametrisering av planet som inneholder de tre punktene  $A, B$  og  $C$ .
- Finne en likning for planet i b) og bestemme arealet til trekanten  $ABC$ .

## 9

Finne korteste avstand mellom punktet  $P(1, -4, -5)$  og linjen som går gjennom punktet  $A(1, 1, -1)$  og som har retningsvektor  $\mathbf{r} = [1, 2, 0]$ .

## 10

- Finne den korteste avstanden mellom linjene parametrisert ved

$$[2, 2, 3]t + [1, 2, 3]$$

for reelle  $t$ , og ved

$$[4, 1, -5]s + [1/2, 1/3, -2]$$

for reelle  $s$ .

- (Ekstra utfordring) Finne endepunktene til det korteste linjestykke mellom linjene (det er det samme som et punkt på hver linje slik at avstanden mellom dem er minst mulig.)

## Følger og rekker

## 11

Finne summen til de aritmetiske rekkene

$$a) \quad 5 + 7 + \dots + 37$$

$$b) \quad 4 + 12 + 20 + \dots + 100$$

$$c) \quad -100 - 98 - 96 - \dots - 82$$

## 12

Hvor mange ledd må dere ha med i en aritmetisk rekke som starter med 1 og hvor etterfølgende ledd øker med 3 for at summen skal bli nærmest mulig 1000? Hva er summen da?

$$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \dots + (3n - 2)$$

## 13

Finn summen til rekkene som en funksjon av  $n$

$$a) \quad \sum_{i=1}^n \frac{2^{2i}}{3^i}$$

$$b) \quad \sum_{i=1}^n (-1)^i i$$

$$c) \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+2)}$$

## 14

a) Beskriv det rasjonale tallet

$$0.1231231213 \dots = 0.\underline{123}$$

som en brøk.

b) Hva må  $x$  være for at den uendelige geometriske rekken

$$x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

skal konvergere til 2?

c) Vi setter inn 1000 kr hvert år fra 1.1.2022 til og med 1.1.2030. Hvor mye penger har vi på kontoen ved utgangen av 2040 hvis årlig rente i hele perioden er 10%?

d) Finn summen av inversen til alle naturlige tallene som bare er delelige med primtallene 2, 3 og 5. Det vil si finn summen av alle tall på formen

$$\frac{1}{2^k 3^l 5^m}$$

for  $k, l, m \geq 0$ . Ordnet etter avtagende størrelse ser rekken ut som

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \dots$$

## 15

Finn konvergensområde til de to potensrekkenen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^{(2n+1)}}{2^{n+3}}$$