Innlevering i	FORK1100 - Matematikk forkurs OsloMet
	Obligatorisk innlevering 2
Innleveringsfrist	Fredag 29. oktober 2021 kl. 14:30
Antall oppgaver:	16 (+2)

Løsningsforslag

1

Finn volum og overflateareal til følgende figurer. Tegn gjerne figurene.

a) Et rett rektangulert prisme med sideflater av lengde 2, 3, og 5.

LF: Volumet er $V = 2 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{30}$. Overflaten består av seks flater. Arealet er

$$2(2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5) = \underline{62}.$$

b) En rett sylinder med radius 3 og høyde 7. (Topp og bunnplaten tas med når dere finner overflatearealet).

Volumet er grunnflate ganget med høyden. Det er $\pi \cdot 3^2 \cdot 7 = \underline{63\pi}$. Overflatearealet er

$$2\pi \cdot 3 \cdot 7 + 2 \cdot (\pi \cdot 3^2) = 2 \cdot 3(7+3)\pi = \underline{60\pi}.$$

c) Ein kjegle med radius 3 og høyde 7. (Bunnplaten tas med.)

Volumet er en tredel av volumet til tilsvarende sylinder. Fra b) er derfor volumet $63\pi/3 = \underline{21\pi}$.

Bunnflaten har areal $\pi 3^2$. Kjeglen har det samme arealet som et sirkelsegment med radius $\sqrt{3^2+7^2}$ og buelengde lik $2\pi \cdot 3$. Sirkelsegmentet har areal halvparten av $\sqrt{3^2+7^2}$ ganget med buelengden. Dette er $\sqrt{58}2\pi \cdot 3/2 = 3\sqrt{58}\pi$. Totalt areal er derfor $\underline{(9+3\sqrt{58})\pi}$

d) En kule med radius 5. Volumet er $4\pi 5^3/3 = \underline{500\pi/3}$. Overflatearealet er

$$4\pi 5^2 = \underline{100\pi}.$$

e) En halvkule (hvor snittflaten tas med) som har diameter 3.

Radien er halvparten av diameteren. Volumet er halvparten av volumet til den tilsvarende kulen. Volumet er derfor lik

$$4\pi(3/2)^3/3 \cdot 2 = \underline{9\pi/4}.$$

Overflatearealet er

$$4\pi(3/2)^2/2 + \pi(3/2)^2 = \underline{27\pi/4}.$$

2

Finn vinklene og lengden til sidene, samt arealet til trekanten $\triangle ABC$ gitt som følger. Svaret kan gis som desimaltall med minst 4 siffers nøyaktighet. Tallene som er oppgitt er eksakte.

a) $\angle A = 90°$, $\angle C = 30°$ og $AB = 8$.

LF: Dette er en rettvinkla trekant. Siden summen av vinklene i en trekant er 180° så er $\underline{\angle B = 60°}$. Hypotenusen BC har lengde

$$\underline{BC = 8/\sin(30°) = 8/(1/2) = 16.00}.$$

Kateten AC har lengde $\underline{AC = 8/\tan(30°) = 8/(1/\sqrt{3}) = 8\sqrt{3} \approx 13.856}$. Arealet til trekanten er $AC \cdot AB/2$ (siden $\sin(\angle A) = 1$). Arealet er

$$(8\sqrt{3}) \cdot 8/2 = 32\sqrt{3} \approx \underline{55.425}.$$

b) $\angle A = 90°$, $\angle C = 33°$ og $AB = 8$. Denne oppgaven er svært lik deloppgave a). Vinkel C er øka fra 30 til 33 grader. Vi forventer derfor at AC og BC er litt kortere her. Vinkel B er lik $\underline{\angle B = 57°}$. Hypotenusen BC har lengde

$$\underline{BC = 8/\sin(33°) \approx 14.689}$$

Kateten AC har lengde $\underline{AC = 8/\tan(33°) \approx 12.319}$. Arealet til trekanten er

$$AC \cdot AB/2 = 12.319 \cdot 8/2 \approx \underline{49.276}.$$

c) $\angle C = 20°$ og $AC = BC = 10$.

LF: Dette er ein likebeina trekant med to sider av lengde 10 og vinkel 20° mellom de to like sidene. Vinkel A og B må da være like store. Siden summen av vinklene i en trekant er 180° er $\underline{\angle A = \angle B = 80°}$. Lengden på siden $\underline{AB}$ er lik $2AC\cos(80°) = 20\cos(80°) \approx \underline{3.473}$. Arealet til trekanten er lik $AB \cdot AC \cdot \sin(80°)/2 \approx \underline{17.10}$.

d) $\angle A = 55°$, $\angle B = 44°$ og $AC = 23$.

LF: Siden summen av vinklene i en trekant er 180° så er $\underline{\angle C = (180 - 44 - 55)° = 81°}$. Her er det naturlig å anvende sinussettningen siden vi kjenner både vinkel B og lengden til side $b = AC$. Sinussettningen sier at følgende forhold er like

$$\frac{\sin\angle B}{b} = \frac{\sin\angle A}{a} = \frac{\sin\angle C}{c}.$$

Forholdet er lik $\sin(44°)/23 = 0.0302025\ldots$.

Lengden til siden $\underline{AB \text{ er } \sin(81°)/0.0302025 \approx 32.70}$ og

lengden til siden $\underline{BC \text{ er } \sin(55°)/0.0302025 \approx 27.12}$.

Arealet til trekanten er lik $AB \cdot AC \cdot \sin(55°)/2 \approx \underline{308.1}$.

e) $\angle A = 40^\circ$, $AC = 8$ og $BC = 7$.

LF: Det er to forskjellige trekanter med disse egenskapene. Vi bruker sinussetningen og får :

$$\frac{\sin\angle C}{c} = \frac{\sin\angle B}{b} = \frac{\sin\angle A}{a} = \frac{\sin(40^\circ)}{7} \approx 0.0918268\ldots.$$

Det følger at $\sin\angle B = AC \cdot 0.0918268\ldots = 0.734614\ldots$. Dette gir to mulige løsninger for $\angle B$,

$$\angle B_1 = \arcsin(0.734614) = 47.27^\circ \quad \text{og} \quad \angle B_2 = 180^\circ - \angle B_1 = 132.7^\circ.$$

Tilsvarende verdier for vinkel C er $\angle C_1 = 92.73^\circ$ og $\angle C_2 = 7.275^\circ$. Lengden til siden AB, eller c, er lik $\sin(\angle C)\sin(\angle A)/a$. I de to tillfellene får vi $\underline{AB_1 = 10.88 \text{ og } AB_2 = 1.37}$.

Arealet til trekanten er lik $AC \cdot AB \cdot \sin(\angle C)/2$. I tilfelle 1 er arealet til trekanten lik $8 \cdot 7\sin(92.725^\circ) \approx \underline{27.97}$ og i tilfelle 2 er arealet til trekanten lik $8 \cdot 7\sin(7.2746^\circ)/2 \approx \underline{3.545}$.

f) $\angle A = 120^\circ$, $AB = 12$ og $AC = 7$.

Her er det naturlig å bruke cosinussettningen siden vi kjenner vinkelen mellom de to kjente sidene. Cosinussettningen gir at

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos(120^\circ) = 7^2 + 12^2 - 2 \cdot 7 \cdot 12(-1/2) = 49 + 144 + 84 = 277.$$

Siden $a > 0$ så er $\underline{BC = a = \sqrt{277} \approx 16.64}$. Fra sinussettningen er

$$\sin(\angle C) = AB \cdot \sin(\angle A)/BC = 12(\sqrt{3}/2)/16.6433 = 0.62441\ldots\ .$$

Siden $\angle A = 120^\circ$ så er summen av vinkel B og vinkel C lik 70°. Derfor er $\underline{\angle C = 38.64^\circ}$ og $\underline{\angle B = 21.36^\circ}$. Arealet til trekanten er lik

$$7 \cdot 12 \cdot \sin(120^\circ)/2 = \underline{36.37}.$$

3

Gjør om følgende vinkler oppgitt i grader til radianer. Gi svaret eksakt.

$$a)\ 270^\circ \quad b)\ 150^\circ \quad c)\ 25^\circ \quad d)\ 18^\circ \quad e)\ 135^\circ.$$

LF:

$$a)\ 270^\circ = \frac{3\pi}{2} \quad b)\ 150^\circ = \frac{5\pi}{6} \quad c)\ 25^\circ = \frac{5\pi}{36} \quad d)\ 18^\circ = \frac{\pi}{10} \quad e)\ 135^\circ = \frac{3\pi}{4}.$$

4

Gjør om følgende vinkler oppgitt i radianer til grader. Gi svaret som desimaltall og avrundt til 5 gyldige siffer.

$$a)\ \pi/3 \quad b)\ 1 \quad c)\ \frac{1}{57} \quad d)\ \frac{22}{7} \quad e)\ \frac{5\pi}{4}.$$

LF:

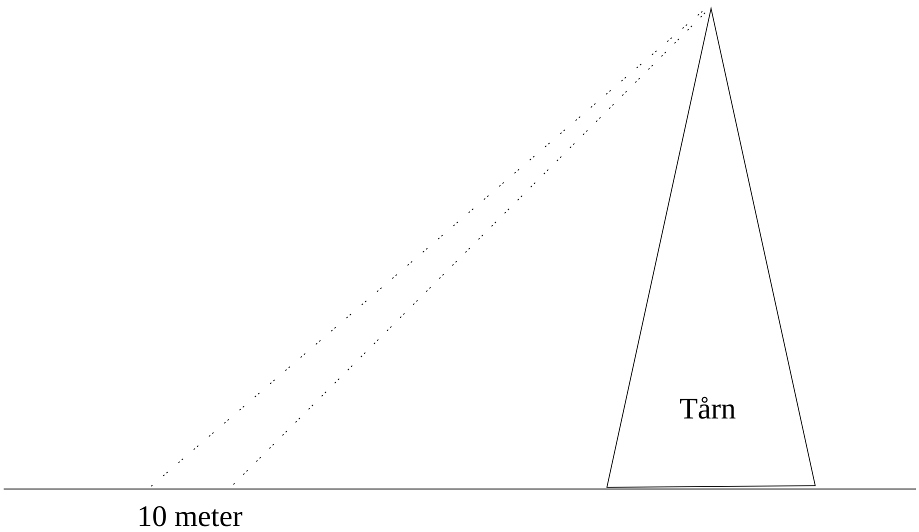
$$a)\ \pi/3 = 60.000^\circ \quad b)\ 1 = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.296^\circ \quad c)\ \frac{1}{57} = 1.0052^\circ$$
$$d)\ \frac{22}{7} = 180.07^\circ \quad e)\ \frac{5\pi}{4} = 225.00^\circ.$$

5

Et tårn står på en flat bakke. Vi har et instrument som kan måler vinkler (mellom laserstråler) nøyaktig og et kort målband. Vi måler først vinklen mellom linjen fra bakken der vi står og toppen av tårnet og bakkenivået. Den er 45.0 grader. Deretter går vi 10 meter i retning vekk fra tårnet. Vi måler vinkelen igjen og finner at den nå er 41.3 grader. Hvor høyt er tårnet?

LF: La h være høyden til tårnet. La b være den horisontale avstanden fra første målepunt til foten av tårnet (rett under tårnes topp). Da er $y = h/\tan(45^\circ) = h$. Videre er $y + 10m = h/\tan(41.3^\circ)$. Dette gir at $h(1/\tan(41.3^\circ) - 1) = 10m$.

Derfor er høyden lik $h = 10m/(1/\tan(41.3^\circ) - 1) = \underline{72m}$.



6

Finn alle vinkler v, med enhet radianer, i intervallet $[0, 2\pi]$ slik at hver av likningene er oppfylt. Svarene skal gis eksakt.

a) $\sin(v) = -\frac{1}{2}$

LF: Løsningene er $\underline{v = \frac{7\pi}{6} \text{ eller } v = \frac{11\pi}{6}}$.

b) $\cos(v) = 1$

LF: Løsningene er $\underline{v = 0 \text{ eller } v = 2\pi}$.

c) $\cos(v) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

LF: Løsningene er $\underline{v = \frac{5\pi}{6} \text{ eller } v = \frac{7\pi}{6}}$.

d) $\sin(v) - \sqrt{3}\cos(v) = 0$

LF: Det er ingen løsning når $\cos v = 0$ (siden da er $\sin v = \pm 1$). Likningen er derfor ekvivalent til likningen $\tan(v) = \sqrt{3}$. Løsningene er $\underline{v = \frac{\pi}{3} \text{ og } v = \frac{4\pi}{3}}$.

e) $\sin(v)\cos(v) = 0$

LF: Likningen er ekvivalent til $\sin(v) = 0$ eller $\cos(v) = 0$. Løsningsmengden er

$$\underline{\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}}.$$

7

Finn alle vinkler v, med enhet grader, i intervallet $[0, 360°]$ slik at hver av likningene er oppfylt. Svarene skal gis med fem gyldige siffer.

LF: Vi avrunder løsningene til 5 gyldige siffer.

a) $\sin(v) = \frac{1}{3}$

LF: Løsningene er $\underline{v = 19.471° \text{ eller } v = 160.53°}$.

b) $\cos(v) = 0.8$

LF: Løsningene er $\underline{v = 36.870° \text{ eller } v = 323.13°}$.

c) $\sin(v) = 2$

LF: Likningen har ingen relle løsninger.

d) $\tan(v) = 1000$

LF: Løsningene er $\underline{v = 89.943 \text{ eller } v = 269.94°}$.

e) $\sin(v) = \frac{\pi}{180}$

LF: Løsningene er $\underline{1.0001° \ (\arcsin(\frac{\pi}{180}) = 1.0000507765\ldots) \text{ eller } 179.00°}$.

8

Finn alle vinkler v, med enhet grader, i intervallet $[0, 360°]$ slik at hver av likningene er oppfylt. Svarene skal gis eksakt.

a) $\sin^2(v) = \frac{1}{2}$

LF: Likningen er ekvivalent til $\sin(v) = 1/\sqrt{2}$ eller $\sin(v) = -1/\sqrt{2}$. I intervallet er løsningene gitt ved $\underline{v = 45, 135, 225 \text{ og } 315 \text{ grader}}$.

b) $2\sin(v) + 5 = 9 - \sin(v)$

LF: Dette er en lineær likning i $\sin(v)$. Vi løser likningen of får $\sin(v) = 4/3$. Denne likningen har ingen løsning siden $\sin(v) \leq 1$ for alle v.

c) $\cos^2(v) - \cos(v) = 0$ Vi faktoriserer uttrykket og får $\cos(v)(\cos(v) - 1) = 0$. Et produkt er lik null hvis og bare hvis minst en av faktorene er null. Derfor er løsningen alle v slik at $\cos(v) = 0$ eller $\cos(v) = 1$. Løsningen er derfor $v = 0, 90, 270$ og 360 grader.

d) $\sin^2(v) + \cos(v) - 1 = 0$

LF: Siden $\sin^2(v) = 1 - \cos^2(v)$ for alle v så er liknigen ekvivalent til $-\cos^2(v) + \cos(v) = 0$. Dette er igjen ekvivalent til likningen i deloppgave c), og derfor er løsningsmengden som i c).

e) $2\sin(v) - \tan(v) = 0$

LF: Her må vinkelen v være slik $\cos(v) \neq 0$ siden $\tan(v)$ er bare definert da. Vi faktoriserer uttrykket og får $\sin(v)(2 - 1/\cos(v)) = 0$. Produktet er null hvis og bare hvis $\sin(v) = 0$ eller $\cos(v) = 1/2$. Løsningen er derfor

$v = 0, 60, 180, 300$ og 360 grader.

9

Forholdet mellom volumet til en kule med radius 1 og volumet til den minste kuben som inneholder den er lik $\pi/6 = 0.52359877\ldots$.

Regn ut forholdet mellom volumet til en kule med radius 1 og volumet til den største kuben som er inneholdt i kulen. Svaret skal gis eksakt.

LF: Senteret til kulen og kuben sammenfaller. Kuben er størst når alle 8 hjørnene berører kulen. La senteret være i origo og roter kuben slik at sidene er parallelle til en av koordinatplanene. Hvis linjene (mellom hjørnene) har lengde s så er koordinaten til hjørnene gitt ved (x, y, z) for alle x, y og z slik at absoluttverdien deres er lik $s/2$ (halvparten av sidelengden). Avstanden fra senter, origo, til hvert av hjørnene er derfor lik $\sqrt{3 \cdot (s/2)^2} = \sqrt{3}s/2$. Denne avstanden er lik radius. Forholdet mellom radius og lengden på sidene er derfor gitt ved $R = \sqrt{3}s/2$. Volumet til kuben er lik

$$s^3 = (2R/\sqrt{3})^3 = 8R^3/(3\sqrt{3}).$$

Forholdet mellom volumet til en kule og volumet til den største kuben som er inneholdt i kulen er derfor lik

$$\frac{4\pi R^3/3}{s^3} = \frac{4\pi R^3/3}{8R^3/(3\sqrt{3})} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \approx \underline{2.72}.$$

Forholdet mellom volumet til kuben og kulen er 0.36755..., litt over en tredel.

10

Her er to oppgaver som ligner mye på oppgaver gitt til eksamen 2017 og 2018.

a) I en firkant $ABCD$ er $\angle A = 60°$ og $\angle C = 110°$. Vi får også oppgitt følgende lengder på noen av sidene $|AB| = 8$, $|BC| = 4$ og $|DA| = 11$. Finn arealet til firkanten.

LF: Vi benytter kosinussetningen til å finne lengden til BD.

$$|BD| = \sqrt{11^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 11 \cos(60°)} = \sqrt{97} = 9.8488$$

Vi kan nå benytte sinussetningen til å finne vinkler og sidelenger i trekanten BCD.

$$\frac{\sin(\angle BCD)}{|BD|} = \frac{\sin(\angle BDC)}{|BC|} = \frac{\sin(\angle DBC)}{|CD|}$$

Dette gir

$$\angle BDC = \arcsin\left(\sin(110°)\frac{4}{9.8488}\right) = 22.435°$$

Den siste vinkelen er da lik

$$\angle DBC = 180° - 22.435° - 110° = 47.564°$$

Vi har da det vi trenger for å inne arealet til firkanten.

Her er den siste sidelengder i trekanten:

$$|CD| = |BD|\frac{\sin(DBC°)}{\sin(BCD°} = 7.735$$

Arealet er summen av arealet til de to trekantene ABD og BCD. Arealsetningen gir at arealet er lik

$$\frac{1}{2}\left(8 \cdot 11 \sin(60°) + 9.8488 \cdot 4 \sin(47.564°)\right) = \underline{52.6}$$

b) Vi har en trekant ABC hvor lengden $|AB| = 30$ cm og vinkel $\angle A = 35°$ og $\angle B = 100°$. Bestem lengden på sidene BC og AC.

LF: Her er det kanskje enklest å benytte sinussetningen. La $|BC| = a$, $|AC| = c$ og $|AB| = c$.

$$\frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{\sin(\angle B)}{b} = \frac{\sin(\angle C)}{c}$$

Vi kjenner alle vinklene siden summen av vinklene i en trekant er 180 grader så

$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 45°$$

Siden $c = 30$ cm får vi da

$$|BC| = a = c\frac{\sin(\angle A)}{\sin(\angle C)} = (30\text{cm})\frac{\sin(35°)}{\sin(45°)} = \underline{24.33\text{cm}}$$

$$|AC| = b = c\frac{\sin(\angle B)}{\sin(\angle C)} = (30\text{cm})\frac{\sin(100°)}{\sin(45°)} = \underline{41.78\text{cm}}$$

Vektorregning

11

Finn vektoren $\overrightarrow{AB}$ når punktene er gitt som følger.

a) $A = (1, 4)$ og $B = (6, 7)$

LF: Vi har at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Vektoren $\overrightarrow{OB}$ har koordinater gitt ved punktkoordinatene til B etc. $\overrightarrow{AB} = [6, 7] - [1, 4] = \underline{[5, 3]}$

b) $A = (0, 0, 0)$ og $B = (6, 7, 13)$

LF: Punktet A er origo. Derfor er

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = \underline{[6, 7, 13]}.$$

c) $A = (4, 0, -14)$ og $B = (0, 0, 0)$

LF: Punktet B er origo. Derfor er

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} = -[4, 0, -14] = \underline{[-4, 0, 14]}.$$

d) $A = (1.34, 6.87, 9.678)$ og $B = (6.789, 7.77, 13.654)$

LF:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [6.789, 7.77, 13.654] - [1.34, 6.87, 9.678] = \underline{[5.449, 0.9, 3.976]}.$$

e) $A = (1/4, 5/6, 7/13)$ og $B = (3/6, 5/24, 8/7)$

LF:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [3/6, 5/24, 8/7] - [1/4, 5/6, 7/13] =$$
$$[3/6 - 1/4, 5/24 - 5/6, 8/7 - 7/13] = \underline{[1/4, -5/8, 55/91]}.$$

12

a) Finn koordinaten til punktet A når punktet B har koordinat $(-2.45, -3.22)$ og

$$\overrightarrow{BA} + [2.34, 5.89] = [2.89, -5.00].$$

LF: Vi finner $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$. Dette er lik $[-2.45, -3.22] + [2.89, -5.00] - [2.34, 5.89] = [-1.9, -14.11]$. Der for er koordinaten til A gitt ved $\underline{(-1.9, -14.11)}$.

b) Finn koordinaten til punktet B når punktet A har koordinat $(7, 8, -3)$ og

$$\overrightarrow{BA} + [2, -4, 5,] = [3, -5, 4].$$

LF: Vektoren fra origo til punkt B er lik

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BA} = [7, 8, -3] + [2, -4, 5,] - [3, -5, 4] = [6, 9, -2].$$

Derfor har punkt B koordinater $\underline{(6, 9, -2)}$.

c) La B ha koordinat $(3,4)$ og C ha koordinat $(7,7)$. La punktet A ligge på linjestykke mellom B og C slik at AB er dobbelt så lang som AC. Finn koordinaten til A.

LF: Vi har at $\overrightarrow{BA}$ er lik $(2/3)\overrightarrow{BC}$. Derfor er $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + (2/3)\overrightarrow{BC}$ som er lik

$$[3,4] + (2/3)([7,7] - [3,4]) = [3,4] + (2/3)[4,3] = [3 + 8/3, 4 + 2] = \underline{[17/3, 6]}.$$

d) Beskriv linjen som går gjennom punktet $(3,-5)$ og som er parallell til linjen gjennom punktene $(-4,5)$ og $(1,-3)$. (For eksempel som en likning i x og y som har graf lik linjen.)

Stigningstallet til den oppgitte linjen er $(5-(-3))/(-4-(1)) = -8/5$. Linjen er derfor på formen $y = -8x/5 + b$ for en konstant b. Siden linjen skal gå gjennom punktet $(3,-5)$ så må $-5 = -8 \cdot 3/5 + b$. Derfor er $b = -1/5$. Linjen kan derfor beskrives ved $\underline{y = -8(x+1)/5}$.

Alternativt: En parametrisering av linjen er $x = 3 + 5t$ og $y = -5 - 8t$, for en paramter t.

e) Finn koordinaten til punktet som ligger midt mellom punktene $(1,2,3)$ og $(4,-3,-6)$.

LF: Punktet C midt mellom to punkt A og B er gitt ved

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + (1/2)\overrightarrow{AB} = (1/2)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Derfor er koordinatene til midtpunktet gjennomsnittet av koordinatene til hvert av punktene. I dette tillfellet er det $\underline{(5/2, -1/2, -3/2)}$.

13

Gitt følgende fire punkt: $A = (2,4,6)$, $B = (1,4,-1)$, $C = (1/2,3,-2)$ og $D = (-1,5,-1/3)$.

a) Finn vektoren $\overrightarrow{AC}$ og finn summen av vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BC}$.

LF: Vektoren $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ er derfor lik $\underline{[-3/2, -1, -8]}$. Summen av vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BC}$ er lik $\overrightarrow{AC}$. Alternativt kan vi regne ut hver av summandene og så legge sammen.

b) Finn følgende sum

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.$$

LF: Dette er lik vektoren $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}$. På koordinatform er dette lik $\underline{[3/2, -2, -5/3]}$.

c) Finn følgende sum

$$3\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{BC}.$$

LF: Summen av vektorene er $\underline{-[6, 6, 27]}$.

d) Finn følgende sum

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}.$$

LF: Summen er 0-vektoren.

e) Finn følgende sum

$$2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BD} + 4\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}.$$

LF: Vektoren er lik summen $-\overrightarrow{OA} + 7\overrightarrow{OB} - 6\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{DB}$. Dette er lik $[11, -6, -11]$.

14

Finn absoluttverdien til følgende vektorer.

a) $\overrightarrow{a} = [-5, 12]$
LF: Absoluttverdien er lik $\sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = 13$.

b) $\overrightarrow{b} = [1, -1, 1]$
LF: Absoluttverdien er lik $\sqrt{3} \approx 1.732$.

c) $\overrightarrow{c} = [\sqrt{5}, -2]$
LF: Absoluttverdien er lik $\sqrt{9} = 3$.

d) $\overrightarrow{d} = [1/3, 1/5, -\sqrt{2}/15]$
LF: Absoluttverdien er lik $\sqrt{25 + 9 + 2}/15 = 2/5$.

e) $\overrightarrow{e} = [1.3455, -3.5609, -2.4300]$ (Angi svaret med 5 gyldige siffer.)
LF: Absoluttverdien er lik 4.5161.

15

Bestem vinkelen (i grader) mellom vektorene

a) $[2, 6]$ og $[15, -10]$.
LF: Vi får at vinkelen v mellom vektorene er bestemt av skalarproduktet mellom vektorene og lengdene til vektorene

$$\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cos(v)$$

Vinkelen er gitt som inverscosinius

$$\arccos\left(\frac{[2, 6] \bullet [15, -10]}{|[2, 6]| \cdot |[15, -10]|}\right) = \arccos\left(\frac{-30}{2\sqrt{1 + 3^2} \cdot 5\sqrt{3^2 + (-2)^2}}\right)$$

$$= \arccos(-3/\sqrt{130}) = \underline{105.255^\circ}$$

b) $[1,1,1]$ og $[1,0,0]$.

LF: Vinkelen mellom vektorene er gitt ved

$$\arccos(1/\sqrt{3}) = \underline{54.73\,^\circ}$$

c) $[2,3,5]$ og $[1,-3,4]$.

LF: Vinkelen mellom vektorene er gitt ved

$$\arccos\left(\frac{2-9+20}{\sqrt{4+9+25}\sqrt{1+9+16}}\right) = \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{38}\sqrt{26}}\right) = \underline{65.57\,^\circ}$$

16

Beskriv alle vektorene i rommet med lengde 1 slik at vinkelen til vektoren $[0,-1,0]$ er lik 60 grader. Vil dere har en ekstra utfordring kan dere også beskrive alle vektorene i rommet med lengde 1 hvor vinkelen til vektoren $[2,-1,3]$ er lik 60 grader.

LF: Det er alle vektorer $[x,y,z]$ slik at $y = -1/2$ og

$$x^2 + z^2 = 3/4$$

Dette kan dere se ved å først løse problemet i xy-planet og deretter se at alle løsningene i rommet fremkommer fra disse ved å rotere om y-aksen. En parametrisering er gitt ved

$$x = \sqrt{3}/2\cos(t) \qquad y = -1/2 \qquad z = \sqrt{3}/2\sin(t)$$

Den ekstra utfordringen kan vi løse ved å rotere aksen $\overrightarrow{n} = [2,-1,3]$ til den peker i retning til for eksempel y-aksen. Deretter løse problemet i det nye koordinatsystemet tilsvarende det vi gjorde ovenfor. Deretter rotere tilbake til aksen gitt ved vektoren $\overrightarrow{n}$.

Vi gir to likninger som bestemmer løsningene ved å benytte skalarproduktet. Vi søker vektorer $[x,y,z]$ slik at lengden er lik 1 og vinklene til vektoren $\overrightarrow{n}$ skal være 60 grader. Dette vil si at

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$2x - y + 3z = 1 \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}\cos(60\,^\circ) = \sqrt{14} \cdot 1/2 = \sqrt{7/2}$$

Vi kan også gi en parametrisering her, men den er vanskeligere å komme frem til. Vi kan for eksempel rotere koordinatsystemet slik at vektoren $[2,-1,3]$ peker i sammer retning som den nye andreaksen. Vi kan da finne en parametrisering direkte som i første del. Roterer vi tilbake til det opprinnelige koordinatsystemet får vi en parametrisering. (Dere lærer mer om det i M1000.) Her er eksempel på en parametrisering

$$x = \frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{\cos(t)}{2} + \frac{2\sin(t)}{\sqrt{14}}$$

$$y = \frac{-1}{2\sqrt{14}} + \frac{\cos(t)}{2} + \frac{5\sin(t)}{2\sqrt{14}}$$

$$z = \frac{3}{2\sqrt{14}} + \frac{\cos(t)}{2} + \frac{-\sin(t)}{2\sqrt{14}}$$

Ekstraoppgaver

17

Bestem lengden på alle sidene og finn alle vinklene til alle trekantene spesifisert som følger:

a) Trekantene er rettvinkla og to av sidene har lengde 4 og 5.

Tilfellet 1: Katetene har lengde 4 og 5. Da har hypotenus lengde

$$\sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \approx 6.403.$$

Vinkelen som har kateten med lengde 5 som hosliggende katet er da lik

$$\arctan(4/5) \approx 38.660°.$$

Den andre vinkelen, som har kateten med lengde 4 som hosliggende katet, er da lik $90° - 38.660° = 51.340°$.

Tilfellet 2: Hypotenus er lengre enn katetene. En mulighet er at 5 er lengden på hypotenus og 4 er lengden på den ene kateten. Lengden på den andre kateten er da $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$ (eksakt). Vinkelen som har kateten med lengde 4 som hosliggende katet er da lik $\arccos(4/5) \approx 36.870°$. Den andre vinkelen, som har kateten med lengde 3 som hosliggende, er da lik $90° - 36.870° = 53.130°$.

b) Trekantene er likebeina og en av vinklene er 30 grader og en av sidene har lengde 10.

Tilfellet 1: Vinkelen mellom de to sidene som er like lange er 30 grader. Da er de to andre vinklene $(180° - 30°)/2 = 75°$. Hvis de to sidene som er like lange har lengde 10 har den tredje siden lengden $2 \cdot 10 \sin(15°) \approx 5.176$.

Tilfellet 2: Vinklenen som i tilfellet 1, men anta at det er siden som ikke er like lang som en annen side som har lengde 10. Da er lengden på de to sidene som er like lange lik $(10/2)/\sin(15°) \approx 19.316$.

Tilfellet 3: La oss nå anta at vinkelen på 30 grader ikke er vinkelen mellom sidene som er like lange. Da er begge disse vinklene 30 grader, og vinkelen mellom de like lange sidene er 120°. Hvis de to like lange sidene har lengde 10, da er lengden på den tredje siden $2 \cdot 10 \cdot \sin(60°) = 10\sqrt{3} \approx 17.320$.

Tilfellet 4: La vinklene være som i tilfellet 3. En annen mulighet er at de to like sidene har lengde $10/\sqrt{3} \approx 5.774$ og at den tredje siden har lengde 10.

c) Den ene vinkelen er 30 grader og to av sidene har lengde 8 og 5.

La side a ha lengde 8 og side b ha lengde 5. Vi undersøker hvilke trekanter vi kan ha når vi setter hver av de tre vinklene i trekanten lik vinkelen 30°.

Tilfellet 1: Vinkel C er 30 grader. Ved cosinussetningen er da

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(30°) = 89 - 40\sqrt{3} = 19.717.$$

Derfor er lengden på den tredje siden $c = 4.440$. Ved sinussetningen er

$$\sin(\angle A) = 8\sin(30°)/c = 0.9008.$$

Derfor er $\angle A$ er lik $64.26°$ eller $(180 - 64.26)° = 115.74°$. Sinussetningen gir også at $\sin(\angle B) = 5\sin(30°)/c = 0.5630$. Dette gir at $\angle B$ er lik $34.26°$ eller $145.74°$. Vi ser at de eneste kombinasjoner av vinklene som har sum $180°$ er $\angle A = 115.74°$, $\angle B = 34.26°$, $\angle C = 30°$.

Tilfellet 2: Vinkel B er 30 grader. Ved sinussetningen så er

$$\sin(\angle A) = a\sin(\angle B)/b = 4/5.$$

Derfor er $\angle A$ lik $53.13°$ eller $126.87°$. Når $\angle A = 53.13°$ er da $\angle C = 96.87°$. Ved sinussetningen er da lengden på den siste siden er da lik

$$c = \sin(\angle C)b/\sin(\angle B) = 9.93 \quad \text{(rundet opp fra 9.928).}$$

Tilfellet 3: Vinkel B er 30 grader, men vi ser på den andre muligheten for vinkel A fra Tilfellet 2. Da er $\angle A = 126.87°$. Og derfor er $\angle C = 23.13°$ Ved sinussetningen er da $c = \sin(\angle C)b/\sin(\angle B) = 3.928$.

Tilfellet 4: Vinkel A er lik 30 grader. Ved sinussetningen er

$$\sin(\angle B) = b\sin(\angle A)/a = 5/16 = 0.3125.$$

Dette gir at $\angle B$ er lik 18.21 eller 161.79 grader. Vinkelen $\angle B = 161.79°$ er ikke mulig siden summen av vinklene

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

Hvis $\angle B = 18.21°$, da er $\angle C = 131.79°$. Lengden på den siste siden er $c = a\sin(\angle C)/\sin(\angle A) = 11.93$.

d) Trekanten har sider av lengde 2, 3 og 4. Vi gir navn til hjørnene i trekanten slik at side a har lengde 2, side b har lengde 3 og side c har lengde 4. Fra cosinussetningen har vi at $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle C)$. Dette gir at $\cos(\angle C) = -1/4$. Derfor er $\angle C = \arccos(-1/4) = 104.48°$. Ved sinussetningen så er $\sin(\angle B) = b\sin(\angle C)/c = 0.72618$. Siden summen av vinklene skal være $180°$ så er bare $\angle B = 46.57$ en mulig løsning. Vinkel A må da være $\angle A = 28.96°$.

18

Alle trekanter kan innskrives i en sirkel. Det vil si at det finnes en sirkel med radius R slik at trekanten ligger inni sirkelen og hjørnene til trekanten ligger på selve sirkelen (avstanden fra hvert av hjørnene til senteret er R). Radien R er bestemt av trekanten. I denne oppgaven skal dere vise at en trekant med sider a, b og c kan innskrives i en sirkel med radius lik

$$R = \frac{abc}{\sqrt{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}.$$

LF: Dette resultatet følger ved å sette inn uttrykket for A i deloppgave b) inn i uattrykket for R i deloppgave a).

a) Vis at en trekant med areal A hvor sidene har lengde a, b og c kan innskrives i en sirkel med radius lik

$$R = \frac{abc}{4A}\,.$$

LF: Arealet er lik $ab\sin(\angle C)/2$. Vi har også at $c/2 = R\sin(\angle C)$. Dette ser vi ved å benytte den likebeina trekanten med hjørner A og B samt senteret i sirkelen. Løser vi ut for $\sin(\angle C)$ gir dette $A = abc/(4R)$. Dette gir resultatet $R = abc/(4A)$.

b) Vis at arealet til en trekant med sider av lengde a, b og c er lik

$$A = \frac{\sqrt{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{4}\,.$$

(Hint: Cosinussettning og arealsettning, samt Pytagoras sats $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$.)

Ved cosinussetningen så er $\cos(\angle C) = (c^2 - a^2 - b^2)/(2ab)$. Siden vinklene i en trekant er mellom 0 og 180 grader er alltid sinus av en slik vinkel ikke-negativ. Derfor er $\sin(\angle C) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle C)}$ Arealet er lik

$$A = ab\sin(\angle C)/2 = \frac{ab}{2}\sqrt{\frac{4a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2b^2}}.$$

Siden a og b er positive er dette lik $\frac{\sqrt{4a^2b^2 - (c^4 + a^4 + b^4) + 2(a^2c^2 + b^2c^2 - a^2b^2)}}{4}$. Dette gir resultatet.

Hvis vi faktoriserer uttrykket i roten får vi $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$. Formelen for arealet til en trekant med sider av lengde a, b og c er mest kjent som

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

hvor $s = (a+b+c)/2$. Dette kalles *Herons formel*.