Innlevering i	FORK1100 - Matematikk forkurs OsloMet
	Obligatorisk innlevering 1
Innleveringsfrist	Fredag 24. september 2021 kl. 14:30
Antall oppgaver:	14

Løsningsforslag

1

Løs følgende likninger ved regning, og oppgi svarene eksakt.

1. $2x + 5 = 0$
2. $x - 3(1 - x) = 5$
3. $\dfrac{x}{10} - \left(-\dfrac{6}{4} + \dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{3}{2}$
4. $(1 - x) - \left(2 - \dfrac{3x}{5}\right) + \dfrac{1}{3} = 0$
5. $\dfrac{x}{2x + 1} = -1$

LF:

1. $2x + 5 = 0$ gir $2x = -5$ og dermed $\underline{x = -\frac{5}{2}}$.
2. $x - 3(1 - x) = 5$ gir $x - 3 + 3x = 5$ etter opplï¿½sning av parenteser. Dermed er $4x = 8$, og $\underline{x = 2}$.
3. $\frac{x}{10} - (-\frac{6}{4} + \frac{1}{5}) = \frac{3}{2}$ gir $2x - (-30 + 4) = 30$ etter multiplikasjon med fellesnevner 20. Dermed er $2x = 4$, og $\underline{x = 2}$.
4. $(1-x)-(2-\frac{3x}{5})+\frac{1}{3} = 0$ gir $15-15x-(30-9x)+5 = 0$ etter multiplikasjon med fellesnevner 15. Dermed er $-6x - 10 = 0$, som gir $-6x = 10$, og $\underline{x = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}}$.
5. $\frac{x}{2x+1} = -1$ gir $x = -(2x + 1) = -2x - 1$ etter multiplikasjon med $2x + 1$ (under forutsetting at $x \neq -1/2$). Dermed er $3x = -1$, og $\underline{x = -\frac{1}{3}}$.

2

Løs ulikhetene, og oppgi svarene eksakt.

1. $4x/5 + 1 \geq 3 - 4x$
2. $\dfrac{1}{2} \cdot x + 2 \leq \dfrac{2}{3}$

3. $\dfrac{1}{2x} + 2 \leq \dfrac{2}{3}$

4. $2x + 1 < 4x + 2 \leq 5x - 3$

LF:

1. Ulikheten $4x/5+1 \geq 3-4x$ er ekvivalent til $4x+4x/5 \geq 3-1$. Siden $4x+4x/5$ er lik $4x(1+1/5) = 4x(6/5) = (24/5)x$ er likningen ekvivalent til $x \geq 2\cdot 5/24 = 5/12$. Løsningen er $\underline{x \geq 5/12}$.

2. Ulikheten $\frac{1}{2} \cdot x + 2 \leq \frac{2}{3}$ er ekvivalent til $\frac{1}{2} \cdot x \leq \frac{2}{3} - 2 = \frac{-4}{3}$. Løsningen er $\underline{x \leq \frac{-8}{3}}$.

3. Ulikheten $\frac{1}{2x} + 2 \leq \frac{2}{3}$ er ekvivalen til $\frac{1/2}{x} \leq \frac{2}{3} - 2 = \frac{-4}{3}$. Ved å gange med 2 på begge sider er dette ekvivalent til $\frac{1}{x} \leq \frac{-8}{3}$. Dette har ingen positive løsninger for x. Vi kan derfor avgrense oss til $x < 0$. Ved å gange med $x \cdot \frac{-8}{3}$ (som er positiv) på begge sider vil fortegnet være uendra og vi får $\frac{-3}{8} \leq x$ (for negative x). Løsningen er derfor $\underline{\frac{-3}{8} \leq x < 0}$.

4. Den doble ulikheten er ekvivalent til de to ulikhetene a) $2x + 1 < 4x + 2$ og b) $4x+2 \leq 5x-3$ kombinert. Ulikhet a) er ekvivalent til $1-2 < 4x-2x$, som igjen er ekvivalent til $-1/2 < x$. Ulikhet b) er ekvivalent til $2 + 3 \leq 5x - 4x$, som er $5 \leq x$. Den felles løsningen til disse to ulikhetene er $5 \leq x$. Løsningen er derfor $\underline{x \geq 5}$.

3

Løs følgende likningene ved regning, og oppgi svarene eksakt.

1. $x^2 - 11x + 10 = 0$

2. $(x - 4)x = -25 + 6x$

3. $(x - 1)(x - 2) = 2$

4. $x + \dfrac{1}{x} + 1 = 0$

5. $1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{6}{x^2}$

LF:

1. $x^2 - 11x + 10 = 0$ gir $x = \frac{11 \pm \sqrt{121-40}}{2} = \frac{11 \pm 9}{2}$, og vi ser at $\underline{x = 1}$ eller $\underline{x = 10}$.

2. $(x-4)x = -25+6x$ gir $x^2 - 4x = -25 + 6x$, eller $x^2 - 10x + 25 = 0$. Dermed er $x = \frac{10 \pm \sqrt{100-100}}{2} = \frac{10}{2} = 5$, er $\underline{x = 5}$ eneste løsning av likningen.

3. $(x - 1)(x - 2) = 2$ gir $x^2 - 3x + 2 = 2$, eller $x^2 - 3x = x(x - 3) = 0$. Dermed er $\underline{x = 0}$ eller $\underline{x = 3}$.

4. $x + \frac{1}{x} + 1 = 0$ gir $x^2 + 1 + x = 0$ etter multiplikasjon med nevneren x. Dermed er $x^2 + x + 1 = 0$. Siden $1^2 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$, har likningen ingen løsning.

5. $1 - \frac{1}{x} = \frac{6}{x^2}$ gir $x^2 - x = 6$, eller $x^2 - x - 6 = 0$. Dermed er $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$, og vi ser at $\underline{x = -2}$ eller $\underline{x = 3}$.

4

Løs følgende likninger ved regning, og oppgi svarene eksakt.

1. $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$
2. $x^5 - 13x^3 + 36x = 0$
3. $x^7 = -128$
4. $x^4 = \dfrac{256}{81}$

LF:

1. $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ gir $x(x^2 - 3x + 2) = 0$, og dermed $x^2 - 3x + 2 = 0$ eller $x = 0$. Den første likningen har løsninger $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$. Vi får dermed løsningene $\underline{x = 0}$, $\underline{x = 1}$ og $\underline{x = 2}$.
2. $x^5 - 13x^3 + 36x = 0$ gir $x(x^4 - 13x^2 + 36) = 0$, og dermed $x = 0$ eller $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. For å løse den siste likningen, setter vi $u = x^2$, som gir $u^2 - 13u + 36 = 0$. Dermed er $u = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$, og $u = 9$ eller $u = 4$. Vi ser dermed at $x^2 = 9$ eller $x^2 = 4$, det vil si $x = \pm 3$ eller $x = \pm 2$. Vi får dermed løsninger $\underline{x = 0, \pm 2, \pm 3}$.
3. $x^7 = -128$ gir eksakt en løsning $x = \sqrt[7]{-128} = -2$ siden 7 er odde. Dermed er $\underline{x = -2}$.
4. $x^4 = \frac{256}{81}$ gir to løsninger $x = \pm \sqrt[4]{\frac{256}{81}} = \pm \frac{\sqrt[4]{256}}{\sqrt[4]{81}} = \pm \frac{4}{3}$ siden $\frac{256}{81} > 0$ og 4 er jevn. Dermed er $\underline{x = \frac{4}{3}}$ eller $\underline{x = -\frac{4}{3}}$.

5

1. Finn likningen til linjen med stigningstall 3 og nullpunkt i $x = 2$.
2. Finn likningen til linjen gjennom punktene $(-2, 1)$ og $(3, -2)$.
3. Finn snittpunktet til de to linjenen ovenfor.
4. Bestem hvor linjen $y = 3 - 2x$ ligger på eller over linjen med stigningstall 1 og nullpunkt $x = -2$.

LF:

1. Likningen er $\underline{y = 3(x - 2)}$.
2. Likningen er gitt ved
$$y = \frac{-2 - 1}{3 - (-2)}(x + 2) + 1 = \underline{-(3x + 1)/5}$$
3. Linjene snitter der hvor $3(x - 2) = -(3x + 1)/5$. Løsningen til likningen er $x = 29/18$. Snittpunktet er da $\underline{(29/18, -7/6)}$.
4. Linjen med stigningstall 1 og nullpunkt i -2 er $y = x + 2$. Spørsmålet er derfor: Når er $3 - 2x \geq x + 2$? Løsningene er da $\underline{x \leq 1/3}$.

6

1. Finn likningen til parabelen med toppunkt $(1,1)$ som går gjennom $(-1,-2)$.
2. Finn likningen til parabelen som går gjennom punktene $(-1,1),(0,1)$ og $(1,3)$.
3. Finn likningen til parabelen som går gjennom punktene $(-2,5),(-1,-2)$ og $(1,2)$.
4. Finn likningene for alle parabler som går gjennom de to punktene $(1,1)$ og $(2,4)$. Parametriser gjene løsningene med den ledende koeffisienten.

LF:

1. Løsningen er $y=-(3/4)(x-1)^2+1=\underline{-(3/4)x^2+(3/2)x+1/4}$.
2. Løsningen er $\underline{y=x^2+x+1}$.
3. Vi setter verdiene for de tre punktene inn i uttrykket for en generell parabel $y=ax^2+bx+c$. Dette gir tre likninger med tre ukjente. Løsningen er $\underline{y=3x^2+2x-3}$.
4. Løsningne er alle $\underline{y=ax^2+3(1-a)x+2(a-1)}$, for reelle tall a.

7

Utfør polynomdivisjonen. Finn kvotient og rest.

1. $x^2:(x-1)$
2. $(x^3+2x^2+1):(x^2-1)$
3. $(x^4+1):(x^2-x)$

LF:

1. Vi utfører polynomdivsjonen $x^2:(x-1)$, som gir følgende resultat:

$$\begin{array}{cllll} & x^2 & & & :(x-1)=x+1 \\ - & (x^2 & -x &) & \\ = & & (x &) & \\ - & & (x & -1) & \\ = & & & (1) & \end{array} \tag{1}$$

   Vi ser at vi får kvotient $\underline{x+1}$ og rest $\underline{1}$.

2. Vi utfører polynomdivsjonen $(x^3-4x+1):(x^2-2x+1)$, som gir følgende resultat:

$$\begin{array}{cllllc} & (x^3 & 2x^2 & & +1) & :(x^2-1)=x+2 \\ - & (x^3 & & -x &) & \\ = & & (2x^2 & +x & +1) & \\ - & & (2x^2 & & -2) & \\ = & & & (+x & +3) & \end{array} \tag{2}$$

   Vi ser at vi får kvotient $\underline{x+2}$ og rest $\underline{x+3}$.

3. Vi utfører polynomdivsjonen $(x^4+1):(x^2-x)$, som girfølgende resultat:

$$\begin{array}{llllll} & (x^4 & & & +1) & :(x^2-x)=x^2+x+1 \\ - & (x^4 & -x^3 & &) & \\ = & & (x^3 & & +1) & \\ - & & (x^3 & -x^2 &) & \\ = & & & (x^2 & +1) & \\ - & & & (x^2 & -x \quad) & \\ = & & & & (x \quad +1) & \end{array} \tag{3}$$

Vi ser at vi får kvotient $\underline{x^2+x+1}$ og rest $\underline{x+1}$.

8

Faktoriser følgende uttrykk mest mulig.

1. x^3-2x^2+x
2. $x^2-6x+\frac{35}{4}$
3. $x^2-\frac{5}{2}x+2$
4. x^3+8
5. $x^3-6x^2+11x-6$

LF:

1. Vi har at $x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$. Siden alle faktorene er førstegradsuttrykk, blir faktoriseringen $\underline{x^3-2x^2+x=x(x-1)^2}$.

2. Likningen $x^2-6x+\frac{35}{4}=0$ gir $x=\frac{6\pm\sqrt{36-35}}{2}=\frac{6\pm1}{2}$, og dermed $x=\frac{5}{2}$ eller $x=\frac{7}{2}$. Siden $x^2-6x+\frac{35}{4}$ har ledende term x^2, blir faktoriseringen
$$\underline{x^2-6x+\frac{35}{4}=\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}\right)}.$$

3. Likningen $x^2-\frac{5}{2}x+2=0$ har ikke noen løsninger, og $x^2-\frac{5}{2}x+2$ kan derfor ikke faktoriseres i førstegradsfaktorer. Faktoriseringen blir dermed $\underline{x^2-\frac{5}{2}x+2}$.

4. Likningen $x^3+8=0$ har en løsning $x=\sqrt[3]{-8}=-2$. Dermed vet vi at $(x+2)$ deler x^3+8. For å finne kvotienten, utfører vi polynomdivisjonen $x^3+8:x+2$. Vi får at $(x^3+8):(x+2)=x^2-2x+4$, og dermed er $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$. For å sjekke om den siste faktoren kan faktoriseres i førstegradsfaktorer, løser vi likningen $x^2-2x+4=0$, og ser at en ikke har noen løsninger. Faktoriseringen blir dermed $\underline{x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)}$.

5. Vi forsøker å finne en løsning av likningen $x^3-6x^2+11x-6=0$. Mulige heltallige løsninger er $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$, og vi ser at $x=1$ er en løsning ved innsetting. Polynomdivisjon gir $(x^3-6x^2+11x-6):(x-1)=x^2-5x+6$, og videre er løsningene av $x^2-5x+6=0$ gitt ved $x=2$ eller $x=3$. Dermed blir $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, og faktoriseringen blir $\underline{x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)}$.

9

Sett opp fortegnsskjema for følgende uttrykk.

1. $x^3 - 2x^2 + x$
2. $x^2 - 6x + \frac{35}{4}$
3. x^2
4. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
5. $\dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 5x + 6}$

LF:

1. Vi bruker faktoriseringen $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$, og finner følgende fortegnsskjema:

		0		1	
x	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+
$x-1$	-	-	-	0	+
$x^3 - 2x^2 + x$	-	0	+	0	+

2. Vi bruker faktoriseringen $x^2 - 6x + \frac{35}{4} = (x - \frac{5}{2})(x - \frac{7}{2})$, og finner følgende fortegnsskjema:

		5/2		7/2	
$x - 5/2$	-	0	+	+	+
$x - 7/2$	-	-	-	0	+
$x^2 - 6x + 35/4$	+	0	-	0	+

3. Vi bruker at $x^2 = x \cdot x$, og finner følgende fortegnsskjema:

		0	
x	-	0	+
x	-	0	+
x^2	+	0	+

4. Vi bruker faktoriseringen

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

og finner følgende fortegnsskjema:

		1		2		3	
$x-1$	-	0	+	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	-	0	+	0	-	0	+

5. Vi bruker faktoriseringen

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x(x-1)^2}{(x-2)(x-3)}$$

og finner følgende fortegnsskjema:

		0		1		2		3	
x	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-5x+6}$	-	0	+	0	+	X	-	X	+

10

Løs følgende ulikheter ved regning, og oppgi svarene eksakt.

1. $x^2 - 3x < -2$
2. $x^3 + 8 \geq -19$
3. $\dfrac{2}{x^2} > -\dfrac{1}{x} + 1 \quad (x \neq 0)$

LF:

1. Ulikheten $x^2-3x < -2$ gir $x^2-3x+2 < 0$, og fra fortegnsskjemaet for $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$ ser vi at $x^2-3x+2 < 0$ når $\underline{1 < x < 2}$, det vil si når $\underline{x \in (1,2)}$.
2. Ulikheten $x^3 + 8 \geq -19$ gir $x^3 + 27 \geq 0$, og fra fortegnsskjemaet for $x^3 + 27 = (x+3)(x^2-3x+9)$ ser vi at $x^3 + 27 \geq 0$ når $\underline{x \geq -3}$, det vil si når $\underline{x \in [-3, \infty)}$.
3. Ulikheten $\frac{2}{x^2} > -\frac{1}{x} + 1$ er ekvivalent til $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - 1 > 0$, det vil si $\frac{2+x-x^2}{x^2} > 0$. Siden $x^2 > 0$ når $x \neq 0$, gir dette $2 + x - x^2 > 0$, eller $x^2 - x - 2 < 0$. Fra fortegnsskjemaet for $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ ser vi at $x^2 - x - 2 < 0$ når $-1 < x < 2$ og $x \neq 0$, det vil si når $\underline{x \in (-1,0) \cup (0,2)}$.

11

a) Peter er 2 år og Hanne er 16 år. Når er Hanne tre ganger så gammel som Peter?

b) Jens er to år eldre enn Erna. Om ett år de tilsammen 110 år. Hvor gamle er Erna og Jens nå?

c) Ane, Bente og Casper har til sammen 102 kroner. Ane har 10 kroner mer enn Bente, og Ane og Bente har tilsammen dobbelt så mye penger som Casper. Hvor mye penger har Ane, Bente og Casper?

LF:

a) Peter er 2 år og Hanne er 16 år. Når er Hanne tre ganger så gammel som Peter?

Om x år er Peter $x+2$ år og Hanne er $16+x$ år. Hanne er tre ganger så gammel som Peter når $3(x+2) = 16+x$.

Vi løser likningen. Likningen er ekvivalent til $3x - x = 16 - 6$, så $x = 10/2 = 5$. Vi ser at Hanne er tre ganger så gammel som Peter om 5 år .

De er da henholdsvis 7 og $21(= 3 \cdot 7)$ år gamle.

b) Jens er to år eldre enn Erna. Om ett år de tilsammen 110 år. Hvor gamle er Erna og Jens nå?

La alderen til Jens være J, og alderen til Erna være E. Informasjonen vi er gitt kan da uttrykkes som $J = E + 2$ og $J + 1 + E + 1 = 110$. Vi løser dette lineære likningssystemet med to ukjente og to variabler. Innsettingsmetoden gir $J + E = (E + 2) + E = 110 - 2 = 108$. Derfor er $E = 106/2 = 53$, og derfor $J = E + 2 = 55$. Erna er 53 år og Jens er 55 år.

c) Ane, Bente og Casper har til sammen 102 kroner. Ane har 10 kroner mer enn Bente, og Ane og Bente har tilsammen dobbelt så mye penger som Casper. Hvor mye penger har Ane, Bente og Casper?

La pengemengden til de tre være gitt ved forbokstaven i navnene deres. Informasjon som er oppgitt kan da uttrykkes som $A + B + C = 102$, $A = B + 10$, $A + B = 2C$. Dette er et lineært likningssytem med tre ukjente og tre likninger.

Setter vi inn $A + B = 2C$ i den første likningen får vi $3C = 102$. Derfor er $C = 102/3 = 34$. Ved å sette inn $A = B + 10$ i den tredje likningen får vi $2B = 2C - 10 = 58$, og $B = 29$. Derfor er $A = B + 10 = 39$.

Ane har 39 kroner, Bente har 29 kroner, og Casper har 34 kroner.

12

Løs følgende likninger ved regning, og oppgi svarene eksakt.

1. $\sqrt{5-x} = x + 1$
2. $\sqrt{4-x} = 2 - \sqrt{x}$
3. $\sqrt{3x} = \sqrt[3]{x}$

LF:

1. $\sqrt{5-x} = x+1$ impliserer $5 - x = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ etter kvadrering, eller $x^2 + 3x - 4 = 0$. Dette gir $x = 1$ eller $x = -4$. Vi setter $x = 1$ og $x = -4$ inn i opprinnelig likning $\sqrt{5-x} = x+1$, og ser at $x = 1$ gir løsning, mens $x = -4$ ikke gir løsning. Dermed er $\underline{x = 1}$.

2. $\sqrt{4-x} = 2 - \sqrt{x}$ impliserer $4 - x = (2 - \sqrt{x})^2 = 4 - 4\sqrt{x} + x$ etter kvadrering, og dermed $-2x = -4\sqrt{x}$. Kvadrering av denne likningen gir $4x^2 = 16x$, eller $4x^2 - 16x = 4x(x-4) = 0$, og dermed $x = 0$ eller $x = 4$. Vi setter $x = 0$ og $x = 4$ inn i opprinnelig likning $\sqrt{4-x} = 2 - \sqrt{x}$, og ser at $x = 0$ og $x = 4$ begge gir løsning. Dermed er $\underline{x = 0}$ eller $\underline{x = 4}$.

3. $\sqrt{3x} = \sqrt[3]{x}$ impliserer $(\sqrt{3x})^6 = (\sqrt[3]{x})^6$ (ved å opphøye begge sider av likningen i $6 = 2 \cdot 3$), eller $(3x)^3 = x^2$. Dermed er $(3x)^3 - x^2 = 27x^3 - x^2 = x^2(27x - 1) = 0$, så $x = 0$ eller $x = \frac{1}{27}$. Vi setter $x = 0$ og $x = \frac{1}{27}$ inn i opprinnelig likning $\sqrt{3x} = \sqrt[3]{x}$, og ser at $x = 0$ og $x = \frac{1}{27}$ begge er løsninger. Dermed er $\underline{\underline{x = 0}}$ eller $\underline{\underline{x = \frac{1}{27}}}$.

13

Vise følgende resultat: Hvis a og b er reelle tall slik at $a + b$ er positiv, da er $a < b$ hvis og bare hvis $a^2 < b^2$. (Hint: Du kan for eksempel benytte konjugatsetningen.)

LF: Konjugatsetningen $(b - a)(b + a) = b^2 - a^2$ og vår antakelse at $a + b > 0$ gir at $b - a$ og $b^2 - a^2$ har samme fortegn. Resultatet følger fordi $b > a$ hvis og bare hvis $b - a$ er positiv og $b^2 > a^2$ hvis og bare hvis $b^2 - a^2$ er positiv.

14

Vi har at

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2} = 1.41\ldots < 2 = \sqrt{1} + \sqrt{1}$$

$$\sqrt{144 + 25} = 13 < 12 + 5 = \sqrt{144} + \sqrt{25}$$

Vis hvorfor $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ for alle positive reelle tall x og y.

LF:

Resultatet ovenfor gir at $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ er ekvivalent til

$$(\sqrt{x+y})^2 < (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2.$$

Ulikheten er $x + y < x + y + 2\sqrt{xy}$. Dette er ekvivalent til $0 < \sqrt{xy}$, som er sant for alle positive x og y. Utsagnet $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ er derfor sant for alle positive x og y.