Eksamen 18 des. 2007 24. nov. 2011

1 a) $x^2 + x - 1 = 0$

$a = 1$
$b = 1$
$c = -1$

abc-formelen gir at løsningene er

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\underline{x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}} \quad \text{eller} \quad x = \underline{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$$

b) (I) $3x + 7y = 32$
(II) $4x + 11y = 46$

II − I : $x + 4y = 46 - 32 = 14$

$x = 14 - 4y$

Setter dette inn i I : $3 \cdot 14 - 3 \cdot 4y + 7y = 32$

$42 - 12y + 7y = 32$

$42 - 5y = 32$

$42 - 32 = 10 = 5y$

så $y = \frac{10}{5} = \underline{2}$

$x = 14 - 4 \cdot y = 14 - 4(2) = 14 - 8 = \underline{6}$

Løsningen er $\underline{(x, y) = (6, 2)}$.

d) $\sqrt{4+x} = 5 - \sqrt{x-1}$ $\quad (x \geq -4)$ $\quad \underline{x \geq 1}$

kvadrerer

$$4+x = 25 - 10\sqrt{x-1} + (x-1)$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$4+x - 25 - (x-1) = -10\sqrt{x-1}$$
$$4 - 25 + 1 + x - x = -10\sqrt{x-1}$$
$$-20 = -10\sqrt{x-1}$$
$$2 = \sqrt{x-1}$$

kvadrerer

$$2^2 = 4 = x-1$$

$$\underline{x = 5}$$

setter inn :

VS : $\sqrt{4+5} = 3$

HS : $5 - \sqrt{5-1} = 5 - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3.$

$\underline{\underline{x = 5}}$ er ~~en~~ løsningen til likningen

c) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

$u = x^3$

$u^2 + 7u - 8 = 0$

Løsningene er $u = \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(-8)}}{2}$

$u = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{81}}{2}$

$u = \dfrac{-7 \pm 9}{2}$

$u = 1$ eller $u = -8$.

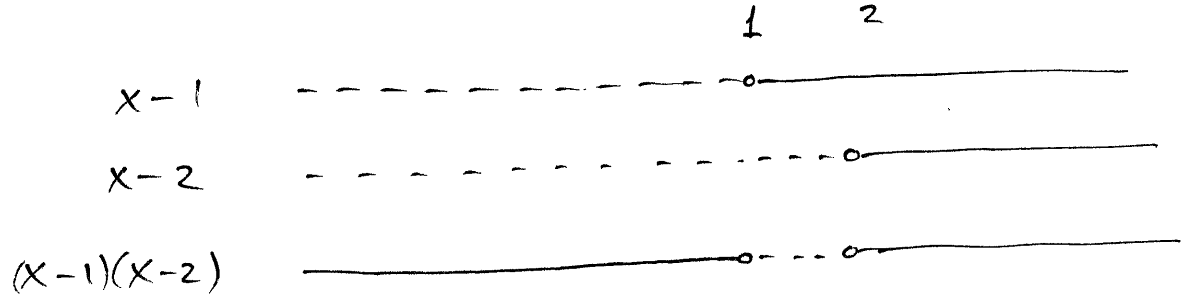
$x^3 = 1$ eller $x^3 = -8$

Løsningene er $\underline{\underline{x = 1}}$ eller $\underline{\underline{x = -2}}$

e) $x^2 - 3x + 3 < 1$

$x^2 - 3x + 2 < 0$

$(x-1)(x-2) < 0$



$(x-1)(x-2) < 0$ for $x \in (1, 2)$

(alt. $1 < x < 2$.)

f)

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

En løsning er $x = 1$ $\quad 1^3 - 2\cdot 1 + 1 = 0$.

Derfor er $(x-1)$ en faktor i $x^3 - 2x + 1$.

Polynomdivisjon

$$
\begin{array}{l}
x^3 - 2x + 1 : x - 1 = x^2 + x - 1 \\
\underline{x^3 - x^2} \\
\quad x^2 - 2x + 1 \\
\quad \underline{x^2 - x} \\
\quad\quad -x + 1
\end{array}
$$

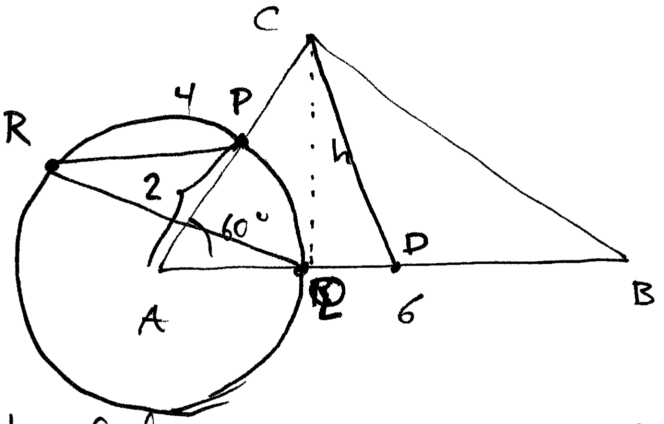
$$x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1)$$

$x^2 + x - 1 = 0$ er oppg 1 a.

Løsningene blir derfor

$$\underline{\underline{x = 1, \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}}}$$

3



a) Arealet er $\frac{6 \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 4 \cdot \sin 60°}{2}$

$= \frac{6 \cdot 4}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{6 \cdot \sqrt{3}} \sim \dots 10.39\dots$

b) $|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2|AB||AC| \cdot \cos(60°)$

$= 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$

$= 16 + 36 - 24$

$= 16 + 12 = 28$

$|BC| = \sqrt{28} = \underline{\sqrt{4 \cdot 7}} = 2\sqrt{7} \sim \underline{5.29\dots}$

Sinussetning $\frac{\sin \angle C}{|AB|} = \frac{\sin 60°}{|BC|} = \frac{\sin \angle B}{4}$

$\sin \angle C = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \sin 60° = \frac{6}{2\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \sim 0.9819\dots$

$\angle C = 79.1°$ (eller $100.9°$)

$\sin \angle B = \cancel{\frac{4}{6}} \frac{4}{|BC|} \cdot \sin 60° = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{7} \cdot 2} = \sqrt{\frac{3}{7}} \sim 0.654\dots$

$\underline{\angle B = 40.89°}$

$\underline{\angle C = 79.1°}$

c) Avstanden AD må være 3.

Arealet ADC er $\frac{1}{2} \cdot h\,|AD|$

— DBC er $\frac{1}{2} h\,|DB|$

Derfor må $|AD| = |BD|$.

Siden $|AB| = 6$ så er $\underline{|AD| = |BD|} = 3$.

d) Arealet til sirkelsektoren

radius · vinkel i radianer

$$2 \cdot \frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}}$$

e) Periferivinkelen $\angle PRQ$ er $\frac{1}{2}$ sentralvinkelen

$$= \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = \underline{\underline{30^\circ}}$$

4 a) $f(x)$ er definert hvis nevneren

$2(x^2-1)$ er ulik null

$2(x^2-1) = 2(x-1)(x+1)$

Nevneren er 0 når $x=-1$ eller $X=1$.

Den naturlige definisjons mengden til $f(x)$

er alle reelle tall bortsett fra -1 og 1.

[$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$x<-1$ eller $-1<x<1$ eller $1<x$

$x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, 1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$.]

b) $f(x)$ møter x-aksen $(y=0)$ når

$f(x)=0$: $\frac{x^2-4}{2(x^2-1)} = 0$

$x^2-4=0$

$\underline{\underline{x=-2}}$ eller $\underline{\underline{x=2}}$.

$$f(0) = \frac{0^2-4}{2\cdot 0^2-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$f(x)$ møter x-aksen i $\underline{(-2,0)}$ og $\underline{(2,0)}$

og y-aksen i $\underline{(0,2)}$.

4 c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{2x^2-2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-4)/x^2}{(2x^2-2)/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-(4/x^2)}{2-(2/x^2)} = \frac{1}{2}$$

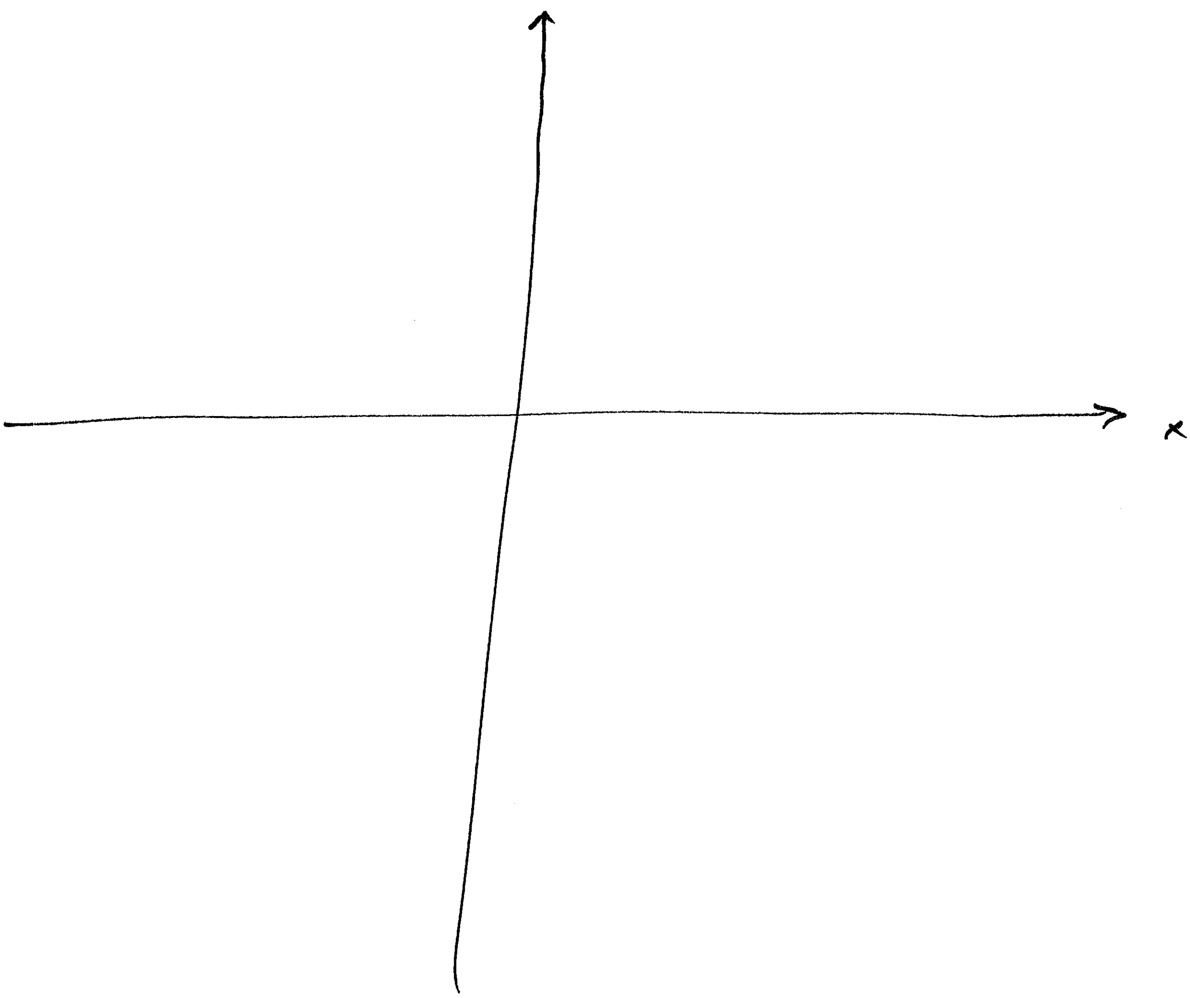
siden $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

$y = \frac{1}{2}$ er en horisontal asymptote.

d) Nevneren er 0 når $x=-1$ eller $x=1$.

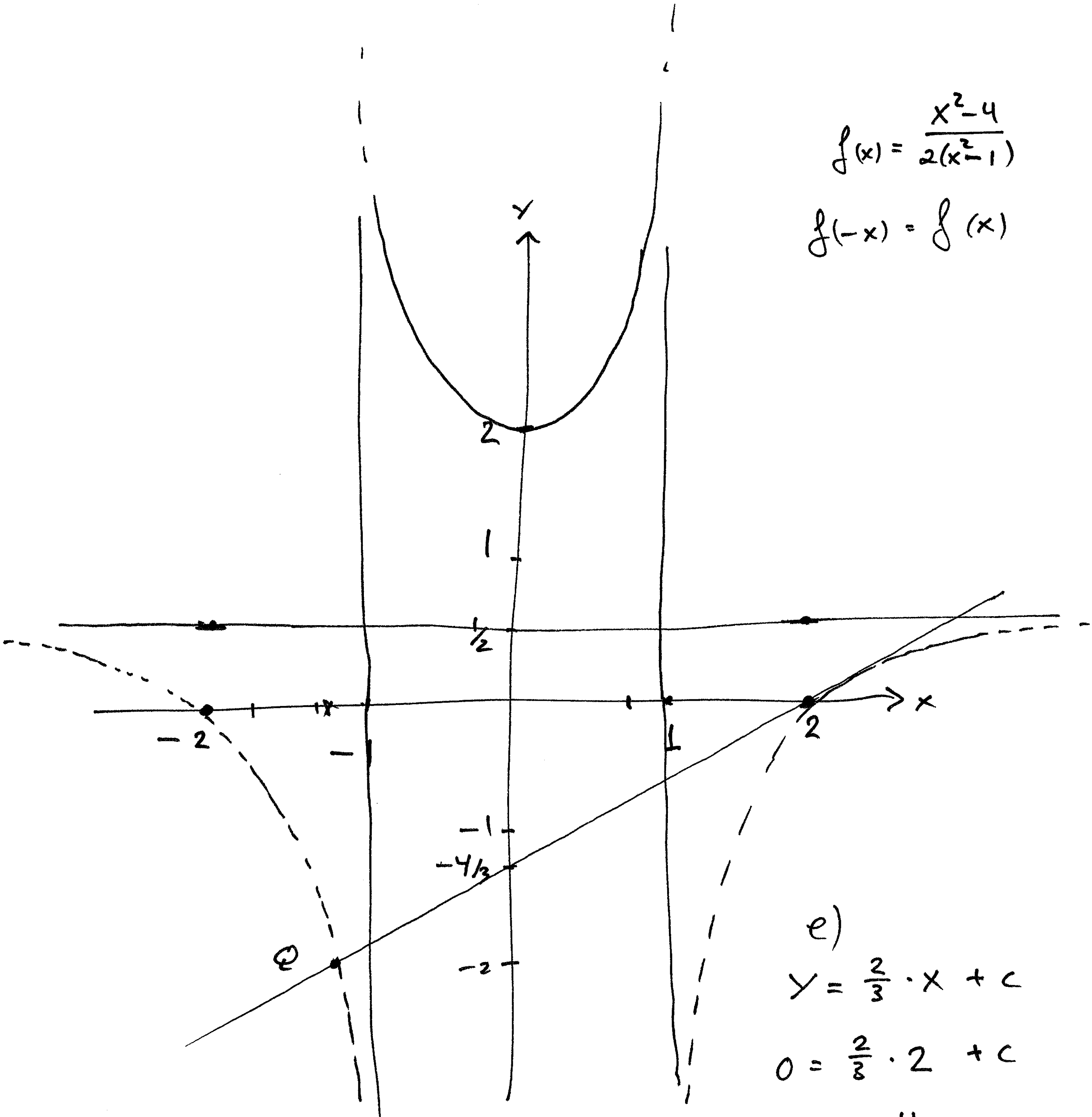
Telleren er ulik 0 for disse verdiene.

Så $x=-1$ og $x=1$ er vertikale asymptoter.



$$f(x) = \frac{x^2-4}{2(x^2-1)}$$

$$f(-x) = f(x)$$



e)

$$y = \frac{2}{3} \cdot x + c$$

$$0 = \frac{2}{3} \cdot 2 + c$$

$$c = -\frac{4}{3}$$

Linjen er gitt ved

$$\underline{y = \frac{2x}{3} - \frac{4}{3}}$$

Et estimat for koordinaten til Q er (

$$\left(-1 - \frac{1}{4}, -2\right)$$

$$Q: \underline{\left(-\frac{5}{4}, -2\right)}$$