Innlevering	BYPE2000 Matematikk 2000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 1
Innleveringsfrist	Tirsdag 11. februar 2013 kl. 10:30
Antall oppgaver:	9

Løsningsforslag

1

Avgjør om følgende rekker konvergerer. Finn summen til de rekkene som konvergerer.

a)

$$\sum_{n=3}^{\infty} 2^{2n}/3^n$$

Siden $2^{2n}/3^n$ er lik $(4/3)^n$ så gjenkjenner vi denne rekken som en geometrisk rekke med faktor 4/3. Så rekken divergerer ved 7.2.5. Siden rekken divergerer har den ingen sum.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+3n}$$

Når n er stor så er n^2 mye større enn $3n$, så rekken oppfører seg som $\sum_{n=1}^{\infty} 4/n^2$. Dette er en p-rekke med $p = 2$ så rekken konvergerer ved 7.6.5.

Vi viser hvordan vi presiserer hva vi mener med "rekken oppfører seg som". Summen til de to rekkene er helt forskjellige. Det er bare når det kommer til spørsmålet om de konvergerer eller divergerer (som er det samme som ikke konvergerer) de oppfører seg likt.

Først benytter vi sammenligningstesten. Når $n \geq 0$, da er $n^2 + 3n = n(n+3)$ større enn eller lik n^2. Derfor er

$$\frac{4}{n^2+3n} \leq \frac{4}{n^2}.$$

Siden leddene $4/(n^2+3n)$ er positive og rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 4/n^2$ konvergerer følger det fra sammenligningstesten 7.7.1. at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 4/(n^2+3n)$ også konvergerer.

Nå benytter vi grensesammenligningstesten. Vi sammenligner leddene $4/(n^2+3n)$ med leddene $4/n^2$. Grensen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4/(n^2+3n)}{4/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+3/n} = 1.$$

Siden leddene er positive og rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 4/n^2$ konvergerer så følger det fra 7.7.4 at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 4/(n^2+3n)$ konvergerer.

Rekken konvergerer og har derfor en sum. Vi skal nå finne summen til rekken. Det n-te leddet minner oss (kanskje), fra tidligere eksempler, om ledd som $1/(n^2+n)$, som lett kan skrives som en teleskoprekke. Delbrøksoppspalting gir

$$\frac{4}{n^2+3n} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Ved å la $p_n = 1/n$ ser vi at det n-te leddet er $(4/3)(p_n - p_{n+3})$. Den N-te delsummen til rekken er

$$4/3\left[(p_1-p_4)+(p_2-p_5)+(p_3-p_6)+(p_4-p_7)+\ldots+(p_N-p_{N+3})\right].$$

Etter at alle kanseleringene er utført står vi igjen med

$$S_N = 4/3(p_1+p_2+p_3-(p_{N+1}+p_{N+2}+p_{N+3}))$$

når $N \geq 1$. Siden p_N går mot 0 når n går mot uendelig får vi at summen er gitt ved

$$S = \lim_{n\to\infty} S_N = (4/3)(p_1+p_2+p_3) = (4/3)(1+1/2+1/3) = \underline{\frac{22}{9}}.$$

Vi viser nå hvordan vi kom frem til delbrøksoppspaltingen. Det er et generelt resultat (4.4.3) at

$$\frac{4}{n^2+3n} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+3}$$

for passende konstanter A og B. Vi søker nå en løsning for A og B.

Vi sammenligner brøkene enklest ved å finne en felles nevner og sammenligne tellerne. Vi får da at

$$4 = A(n+3) + Bn$$

som polynomer med variabel n. Likheten må altså være sann for alle n.

Her er to metoder for å bestemme A og B fra denne ligningen. To polynomer er like hvis alle koeffisientene er like. Siden vi har likheten

$$0 \cdot n + 4 = (A+B)\cdot n + 3A$$

følge det at $A = 4/3$ og at $B = -A = -4/3$. Alternativt, kan vi velge å evaluere uttrykket for "gunstige verdier" av n. For eksempel ved å la $n = 0$ får vi at $4 = 3A$ og ved å la $n = -3$ får vi at $4 = -3B$ så $B = -4/3$. Dette gir i alle tilfeller

$$\frac{4}{n^2+3n} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right).$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$$

(Når konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$? Finn en formel for summen til rekken.)

Denne rekken konvergerer ved forholdstesten. Det n-te leddet er $a_n = n^2/5^n$. Grensen av forholdet mellom suksessive ledd er

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2/5^{n+1}}{n^2/5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)^2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Siden leddene er positive og grensen er mindre enn 1, så følger det fra 7.7.8. at rekken konvergerer.

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ minner oss om rekkene vi får om vi deriverer den geometriske rekken.

Den første og den andre deriverte av den geomtriske rekken er:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

hvor rekkene konvergerer og er lik høyresiden når $|x| < 1$. Multipliserer vi den første rekken med x og den andre med x^2, og så legger dem sammen får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n + (n^2 - n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

For $|x| < 1$ er derfor summen gitt ved

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

Setter vi $x = 1/5$ (som er gyldig siden $|1/5| < 1$) så får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} = \frac{1/5}{(4/5)^2} + \frac{2\cdot(1/5)^2}{(4/5)^3} = 5\left(\frac{4}{4^3} + \frac{2}{4^3}\right) = \frac{5\cdot 6}{4^3} = \underline{\frac{15}{32}}.$$

For alle polynomer $p(x)$ vil faktisk rekken på formen $\sum_{n=1}^{\infty} p(n) x^n$ ha en tilsvarende løsning som et rasjonalt uttrykk i x.

d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+2)}$$

Når n er stor oppfører denne rekken seg som $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Dette er den harmoniske rekken som vi vet divergerer ved 7.6.4. Vi konkluderer med at rekken divergerer. Mer presist. Siden

$$(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+2) \leq (2\sqrt{n})(2\sqrt{n}) = 4\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = 4n$$

for $n \geq 4$ så er

$$\frac{1}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+2)} \geq \frac{1/4}{n}$$

for $n \geq 4$. Leddene er positive. Ved 7.6.2, 7.6.4 og 7.7.1 divergerer rekken.

e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{n}$$

Det n-te leddet er lik $8^n \cdot 2/(9^n \cdot 3)/n = (2/3) \cdot (8/9)^n/n$. Integrerer vi den geometriske rekken, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = x/(1-x)$, for $|x| < 1$, får vi at

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n = -\ln(1-x)$$

når $|x| < 1$. Siden $8/9$ er positiv og mindre enn 1 vil rekken derfor konvergere og summen er

$$(2/3)(-\ln(1/9)) = (2/3)(-\ln(3^{-2})) = (2/3)(-(-2)\ln(3)) = \underline{(4/3)\ln(3)}.$$

Konvergens kan og lett avgjøres ved forholdstesten.

f)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-2n}{n^3-1} - \frac{n^2-1}{n^3+3n^2+3n}$$

Hint: Kan denne tenkes på som en teleskoprekke?

Denne rekken ser kanskje vanskelig ut, men den er enkel så snart vi får ryddet opp i litt algebra. La p_n være lik $(n^2-2n)/(n^3-1)$. Ved å sette inn $n+1$ for n får vi

$$p_{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 2(n+1)}{(n+1)^3 - 1} = \frac{n^2-1}{n^3+3n^2+3n}.$$

Rekken lar seg derfor beskrive som teleskoprekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} p_n - p_{n+1}.$$

Siden grensen $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$, så summen til rekken er gitt ved $p_2 = 0$.

2

Finn den tiende deriverte til følgende funksjoner i $x = 0$. (Det kan være nyttig å benytte Taylor rekker, og produkt av Taylor rekker.)

Vi forsøker å finne potensrekker som er lik funksjonene i en omegn om 0 og benytte 7.4.5 til å finne den tiende deriverte til funksjonen i 0. Resultatet 7.4.5 sier at koeffisienten a_n til x^n er lik $f^{(n)}(0)/n!$. Derfor er $f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$.

a) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

Vi kjenner potensrekken til $\sin(x)$. Den er

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

for alle x. Derfor er

$$x \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+2}$$

for alle x. Koeffisienten til x^{10} er lik $1/9!$ hvor (n=4). Derfor er

$$f^{(10)}(0) = 10! \cdot 1/9! = \underline{10}.$$

b) $f(x) = x^4/1 + x$

Funksjonen er polynomet $x^4 + x$. Den tiende deriverte er $\underline{0}$. (Polynomer er sin egen Taylor rekke.)

c) $f(x) = x^4/(1 + x)$

Dette er en variant av den geometriske rekken (sette inn $-x$ for x og gang med x^4). Potensrekken til $f(x)$ er gitt ved

$$x^4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+4}.$$

Koeffisienten til x^{10} er lik 1, derfor er den tiende deriverte i 0 lik

$$10! = \underline{3\,628\,800}.$$

d), e) $f(x) = e^x \cdot \cos(x)$ og $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

Vi gjør oppgave d) og e) samlet siden de er nokså like. Potensrekkene til de involverte faktorene er

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

To potensrekker multipliseres som grensen av produktet av deres delsummer. Altså som polynomer.

Produktet til rekkene $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ er rekken

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_n b_m x^{m+n} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

hvor $c_k = \sum_{n+m=k} a_n b_m$ (summen er over alle m og n slik at summen deres er lik k).

Koeffisienten til x^{10}, i potensrekken til $e^x \cdot \cos(x)$, er summen av alle leddene $\frac{1}{n!} \cdot (-1)^m (2m)!$ slik at $n + 2m = 10$. Dette er lik

$$\frac{1}{0!} \cdot \frac{1}{10!} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{8!} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{6!} - \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{4!} + \frac{1}{8!} \cdot \frac{1}{2!} - \frac{1}{10!} \cdot \frac{1}{0!} = 0$$

siden leddene kanselerer hverandre. Den tiende deriverte til $e^x \cdot \cos(x)$ i $x = 0$ er derfor lik $\underline{0}$.

Koeffisienten til x^{10} i potensrekken til $e^x \cdot \sin(x)$ er summen $\frac{1}{n!} \cdot (-1)^m (2m+1)!$ slik at $n + 2m + 1 = 10$. Summen er

$$\frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{9!} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{7!} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} \cdot \frac{1}{3!} + \frac{1}{9!} \cdot \frac{1}{1!} =$$
$$\frac{2}{9!} - \frac{2}{3!7!} + \frac{1}{5!5!}.$$

Den tiende deriverte til $e^x \cdot \sin(x)$ er derfor lik denne koeffisienten ganget med 10!

$$2 \cdot 10 - 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8/6 + 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6/120 = 20 - 240 + 9 \cdot 4 \cdot 7 = \underline{32}.$$

3

Bestem om følgende rekker konvergerer absolutt, konvergerer eller divergerer. Vis hvordan du avgjør konvergensspørsmålet. Finn også summen av de 10 000 første leddene (angi svaret med minst 4 gyldige siffer).

Legg merke til at det er lite sammsvar mellom "små" delsummer og konvergens.

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^{(n/10)}}$$

Telleren er polynomet n^{10} og nevner er eksponentialfunksjonen $(\sqrt[10]{10})^n$. Eksponentialfunksjoner, med grunntall større enn 1 blir større enn et hvert gitt polynom for n stor nok. (Dette kan dere dedusere fra potensrekken til e^x.) Rekken vil derfor konvergere. Leddene er positive så rekken konvergerer også absolutt.

Vi kan også argumentere ved å bruke forholdstesten. Vi finner da at grensen når $n \to \infty$ av suksessive ledd er lik $1/\sqrt[10]{10} < 1$. Siden leddene er positive vil derfor rekken konvergere ved 7.7.8.

Summen av de 10 000 første leddene er $\underline{3.7617\ldots \cdot 10^{13}}$.

(Matlab gir 3.761754569412009e+13)

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-1/n}-1)$$

Det vi først observerer er at leddet $a_n = e^{-1/n} - 1$ går mot 0 når n går mot uendelig. Alle leddene er også negative siden $e^{-1/n} < 1$ når $n \geq 1$. Potensrekken til $a_n = e^{-1/n} - 1$ er lik $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n!$. Dette er en alternerende rekke hvor leddenes absoluttverdi er avtagende. Derfor er

$$-1/n < a_n < -1/n + 1/n^2$$

ved 7.6.9. Den harmoniske rekken $\sum_{n=1}^{\infty} -1/n$ divergerer, og p-rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergerer ved 7.6.5, derfor divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} -1/n + 1/n^2$ ved 7.2.7. Ved sammenligningstesten (7.7.1) divergerer også $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-1/n}-1)$

Summen av de 10 000 første leddene er $-9.1278\ldots$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n^2)}{\sqrt{n}}$$

Funksjonen $\sqrt{n}$ er økende i n når $n \geq 0$. Legg merke til at n^2 er et partall når n er et partall, og n^2 er et oddetall når n er et oddetall. Derfor er $\cos(\pi n^2) = (-1)^n$. Rekken er derfor en alternerende rekke hvor absoluttverdien til leddene er avtagende. Sidene leddene går mot 0 når n går mot uendelig vil rekken konvergere ved 7.6.9. Rekken konvergerer ikke absolutt siden p-rekken med $p = 1/2$ divergerer ved 7.6.5. Rekken er derfor betinga konvergent.

Summen av de 10 000 første leddene er $-0.5998\ldots$.

d)

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)(\ln(\ln(n)))^2}$$

Leddene går mot 0 litt raskere enn $1/n$. Spørsmålet er om det er raskt nok til at rekken konvergerer. Leddene går saktere mot 0 enn alle $1/n^p$ for $p > 1$.

Rekken minner oss om eksempler hvor vi har benyttet integraltesten med godt resultat. Vi forsøker med integraltesten. Funksjonen er kontinuerlig og avtagende i n og alltid positiv når $n \geq 3$. Integralet

$$\int \frac{1}{x\ln(x)(\ln(\ln(x)))^2}\,dx = \int \frac{1}{u(\ln(u))^2}\,du = \int \frac{1}{v^2}\,dv = -1/v + c$$

hvor $u = \ln(x)$ og $v = \ln(\ln(x))$. Siden v går mot uendelig når x går mot uendelig konvergerer rekken ved 7.6.3. Rekken konvergerer også absolutt siden leddene er positive.

Summen av de 10 000 første leddene (summen fra $n = 3$ til $n = 1002$) er $37.95\ldots$.

e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{n^6 + 7n^4 - 13n}$$

Når n er stor, da er både teller og nevner domminert av ledende ledd, henholdsvis n^3 og n^6. Rekken oppfører seg derfor som rekken med ledd

$$b_n = \frac{n^3}{n^6} = \frac{1}{n^3}.$$

Dette er en p-rekke med $p = 3$, og den konvergerer ved 7.6.5. Vi forventer derfor at rekken konvergerer. Vi kan gjøre dette mer presist ved å benytte grensesammenligningstesten 7.7.4 og observere at grensen av forholdet mellom n-te ledd i rekken vår og b_n er lik 1.

Summen av de 10 000 første leddene er $\underline{0.08077\ldots}$.

f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^9}$$

Denne rekken divergerer fra divergenstesten 7.6.1 siden n-te ledd alltid er lik det lille tallet 10^{-9}, og vil derfor ikke nærme seg 0 når n går mot uendelig.

Summen av de 10^4 første leddene er $10^4 \cdot 10^{-9} = \underline{10^{-5}}$.

4

Bestem Taylor rekken om $x = 0$ til følgende funksjoner (bruk summetegn notasjon)

$$a)\ f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} \qquad b)\ \int_0^x t^2 e^{-2t^2} \mathrm{d}t$$

a) Taylor rekken til $\sin(x^2)$ finner vi ved å sette inn x^2 for x i Taylor rekken til $\sin(x)$. Deler vi med x (leddvis) finner vi at

$$\frac{\sin(x^2)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x^2)^{2n+1} \cdot x^{-1} = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+1}} =$$

$$x - \frac{x^5}{6} + \frac{x^9}{120} - + \ldots.$$

b) Taylor rekken til $t^2 e^{-2t^2}$ finner vi fra Taylor rekken til e^x. Resultatet er

$$t^2 e^{-2t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} t^{2n+2}.$$

Integrasjon utføres leddvis ved 7.4.1. Integralet $\int_0^x t^{2n+2} \mathrm{d}t$ er lik $x^{2n+3}/(2n+3)$. Derfor er

$$\int_0^x t^2 e^{-2t^2} \mathrm{d}t = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!(2n+3)} x^{2n+3}} = \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} + \frac{4x^7}{14} - + \cdots.$$

5

Vi skal nå finne en tilnærming til $\sqrt{10}$ ved bare å bruke "de fire regnearter".

a) Tilnærming av $\sqrt{10}$ basert på Taylor rekkeutvikling. Du kan for eksempel benytte at

$$\sqrt{10} = 10/\sqrt{10} = 10/(3\sqrt{1+1/9}).$$

Finn de 6 første delsummene når du benytter Tayler utviklingen til $1/\sqrt{1+x}$. Tayler rekken til $1/\sqrt{1+x}$ er gitt i oppgave 7.3.1 b). Den er

$$1/\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^n =$$

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} - \frac{63x^5}{256} + - \ldots .$$

De 6 første delsummene til Rekken foreslått ovenfor er:

$$S_0 = 10/3 = 3.333\ldots \quad S_1 = 170/54 = 3.148148148148148$$

$$S_2 = \frac{2040}{3\cdot 12\cdot 18} = 3.163580246913580 \quad S_3 = 3.162151348879744$$
$$S_4 = 3.162290269521923 \quad S_5 = 3.162276377457705.$$

b) Vi beskriver her en rekursiv metode for å finne kvadratrøtter. Start med en gjetning a_0 (for eksempel 3 for $\sqrt{10}$) og regn ut noen ledd i en tallfølge hvor ledd a_{n+1} er bestemt av ledd a_n som følger

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + a}{2a_n}.$$

Finn de første 6 leddene i tallfølgen når $a = 10$ og du starter med $a_0 = 3$.

$$a_0 = 3 \quad a_1 = 3.1666\ldots a_2 = 3.162280701754386 \quad a_3 = 3.162277660169842$$

$$a_4 = 3.162277660168380 \quad a_5 = 3.162277660168379.$$

c) Hvilke metode ser ut til å funger best for å finne kvadratrøtter?

Den rekursive metoden i b) er både lettere å arbeide med og konvergerer mye raskere. Den er definitivt den beste metoden. Etter 6 itterasjoner gir den en nøyaktighet på omtrent 16 siffer mens Tayler polynom tilnærming med 6 ledd gir en nøyaktighet på omtrent 6 siffer.

6

Rekken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
konvergerer.

a) Forklar hvorfor summen ligger mellom 1 og 2.

Første delsum er 1 så summen er større enn 1 siden alle leddene er positive. Rekken er begrenset ovenfra av rekken $1 + \sum_{n=2}^{\infty} 1/(n^2 - n)$. Dette er en teleskoprekke med sum $1+1 = 2$. Derfor er summen til rekken mindre enn 2. Summe til rekken må ligge mellom 1 og 2. Vi vet at rekken konvergerer, ved 7.1.8, siden følgen av delsummer er en økende følge av tall mellom 1 og 2.

b) Forklar hvorfor differansen mellom summen og den N-te delsumen er mellom$1/N$ og $1/(N+1)$. Forklar hvorfor differansen mellom summen og den N-te delsumm pluss $1/(N+1)$ er mellom 0 og $1/(N^2+N)$.

La S være summen og S_N den N-te delsummen. Da er
$$S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$
Denne summen ligger mellom $\sum_{n=N+1}^{\infty} 1/(n^2+n)$ og $\sum_{n=N+1}^{\infty} 1/(n^2-n)$. Begge disse rekkene er teleskoprekker med sum henholdsvis $1/(N+1)$ og $1/N$. (Vi kan få litt mer nøyaktige estimater ved å benytte for eksempel $1/(n^2+1) < 1/n^2 < 1/(n^2-1)$ i sted for $1/(n^2+n) < 1/n < 1/(n^2-n)$.) Derfor er
$$1/(N+1) < S - S_N < 1/N.$$
Trekker vi $1/(N+1)$ fra ulikhetene får vi
$$0 < S - (S_N + 1/(N+1)) < 1/N - 1/(N+1) = 1/(N^2+N).$$
Dette viser hvorfor differansen mellom summen og den N-te delsumm pluss $1/(N+1)$ er mellom 0 og $1/(N^2+N)$. Den N-te delsum pluss $1/(N+1)$ gir et mye bedre estimat enn bare N-te delsum.

c) Det viser seg at sumen til rekken er lik $\pi^2/6$. Bruk et regneprogram til å finne summen av de 100 000 første leddene. Hvor stor er differansen mellom svaret du får og
$$\pi^2/6 = 1.6449340668482\ldots?$$
Du kan oppgi differansen med 6 gyldige siffer. Hvordan samsvarer dette med resultatet i *b*)?

Delsummen er lik $S_{10^5} = 1.644924066898242\ldots$.

Differansen mellom summen og delsummen er
$$S - S_{10^5} = 9.99994998407416\ldots \cdot 10^{-6}.$$
Differansen mellom summen og estimatet $S_N + 1/(N+1)$ med $N = 10^5$ er $4.998\ldots \cdot 10^{11}$.

Hint til a) og b): Sammenlign gjerne med teleskoprekken med n-te ledd $1/(n^2+n)$ eller sammenlign med et integral.

7

Benytt dobling av vinkel identiteten for sinus

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$$

til å vise at følgende identitet er gyldig

$$\sum_{k+l=n} \frac{(2n+1)!}{(2k+1)!\cdot(2l)!} = 2^{2n}$$

hvor summen er over alle $k, l \geq 0$ slik at summen deres er lik n. Klarer dere å vise dette uten å benytte sinus og cosinus? Sjekk gjerne manuelt for noen små n.

Vi multiplliserer sammen Taylor rekkene til $\sin(x)$ og $\cos(x)$ og sammenligner det med Taylor rekken til halvparten av $\sin(2x)$. Dette gir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} x^{2l} =$$

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{(2k+1)!(2l)!} x^{2(k+l)+1}$$

skal være lik

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} 2^{2n}.$$

Sammenligner vi koeffisienten til x^{2n+1} får vi

$$(-1)^n 2^{2n}/(2n+1)! = \sum_{k+l=n} (-1)^n \frac{1}{(2k+1)!(2l)!}$$

ganger vi med $(-1)^n(2n+1)!$ på begge sider får vi identiteten som vi skulle vise.

Denne identiteten kan vi alternativt vise ved å kombinere identitetene vi får fra binomialformelen for $(1+x)^n$ ved å sette inn $x=-1$ og $x=1$.

8

a) Hvor mange ledd må vi ta med i Taylor utvikling av $\cos(x)$, om $x=0$, hvor x settes lik $1/2$ for at avviket fra $\cos(1/2)$ skal være mindre enn 10^{-20} . Benytt gjerne hjelpemiddel og prøv dere frem.

Taylor rekken til $\cos(x)$ er

$$\cos(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} x^{2l}.$$

Når x er positiv og x er mellom 0 og 1 er dette en alternerende rekke med ledd som er avtagende og som går mot 0 når n går mot uendelig. Ved test for alternerende rekker 7.6.9 så er avstanden mellom $\cos(x)$ og delsumm $2N$ mindre enn eller lik

$$\frac{x^{2(N+1)}}{(2N+2)!}.$$

Dette er midre enn eller lik $1/(2N+2)!$ for alle x mellom 0 og 1. Vi prøver oss litt frem og finner følgende omtrentlige verdier

$$22! \approx 1.12 \cdot 10^{21} \quad \text{og} \quad 24! \approx 6.2 \cdot 10^{23}$$

$$2^{18} 18! \approx 1.67 \cdot 10^{21} \quad \text{og} \quad 2^{20} 20! \approx 2.55 \cdot 10^{24}.$$

Det er derfor tilstrekkelig å benytte delsummen med $N = 16$

$$\sum_{l=0}^{8} \frac{(-1)^l}{(2l)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2l}$$

for å tilnærme $\cos(1/2)$ med avvik mindre enn 10^{-20} .

b) Taylor utviklingen til cos blir inneffektiv hvis variablen er stor. Forklar hvordan utregningen av cos og sin av en vilkårlig vinkel kan reduseres, ved hjelp av diverse trigonometriske identiteter, til cos eller sin av en vinkel mellom 0 og $\pi/4$.

Anta dere skal lage kalkulator som regner ut cos og sin for vilkårlige vinkler. Hvordan vil dere implementere den (basert på betraktningene ovenfor)?

Kosinus og sinus av en vilkårlig vinkel kan opp til å holde styr på et fortegn reduseres til cos eller sin av en vinkel mellom 0 og $\pi/4 < 1$ radian.

Vi beskriver hvordan vi kan lage en cosinus kalkulator.

Gitt en vinkel x trekker vi fra eller legger til kopier av 2π helt til vi får en vinkel mellom 0 og 2π radian. Dette påvirker ikke funksjonsverdiene. Denne vinkelen kan reduseres til en vinkel mellom 0 og π radian ved å reflektere om x-aksen: benytt at $\cos(2\pi - v) = \cos(v)$ og $\sin(2\pi - v) = -\sin(v)$. For vinkler mellom 0 og π radian benytter vi refleksjon om y-aksen til å redusere til vinkler mellom 0 og $\pi/2$ radian: Benytt at $\cos(\pi - v) = -\cos(v)$ og at $\sin(\pi - v) = \sin(v)$. Til sist redusere vi dette til vinkler mellom 0 og $\pi/4$ radian ved å erstatte en vinkel mellom $\pi/4$ og $\pi/2$ med vikelen $\pi/2 - v$ og bytte om på sin og cos. Vi benytter da at $\sin(\pi/2 - v) = \cos(v)$ og $\cos(\pi/2 - v) = \sin(v)$.

c) (En utfordring for spesielt intereserte) Finn $\cos(1/2)$ med minst 20 desimalers nøyaktighet.

Matlab regner til vanlig med en relativ nøyaktighet på ca 10^{-16}. Dette er derfor ikke tilstrekkelig for å regne ut $\cos(1/2)$ med 20 desimaler (siden tallet er omtrent 1).

Vi kan lage til en kalkulator som regner med langt flere siffer enn 16. Vi kan da lagre hvert siffer som et tall og holde styr på dem. Vi kan også benytte en ferdig laget kalkulator som regner med tilstrekkelig mange siffer. I Matlab er vil vpa(

?, n) regne ut ? med n siffers nÃ¸yaktighet. Dette står for "variable precision arithmetic". For eksempel er $vpa(cos(1/2), 20) = 0.87758256189037275874$. Det siste sifferet er ikke n;yaktig det er en avrunding av 39..... Vi kan regne med enda større nøyaktighet

$$vpa(cos(1/2), 20) = 0.87758256189037275873943144688382744789 12.$$

Eg forsøkte også en mer ad hoc metode. Vi kombinerer regning for hand med bruk av matlab (med standard nøyaktigher).

Hvis vi regner ut de første leddene i Taylor utviklingen for hand og resten for maskin kan vi oppnå tilstrekkelig nøyaktighet hvis restleddene vi regner med gir en sum som er mindre enn omlag 10^{-7}. Med relativ nøyaktighet på 10^{-16} får vi da en nøyaktighet til omtrent 10^{-23}. Siden $2^8 \cdot 8! = 10321920 > 10^7$ og ved betraktningene i a) regner vi derfor ut $\cos(1/2)$ ved å finne delsummen $S_6(1/2)$ manuelt og legge den til

$$\sum_{l=4}^{10} \frac{(-1)^l}{(2l)!}(1/2)^{2l} = 9.661259493833851 \cdot 10^{-8}.$$

Dette viste seg IKKE å fungere. Problemet er at utregningen ovenfor blir unøyaktig. Tallet ovenfor er det eg fikk fra å regne dette ut med en løkke i matlab. Det nøyktige svaret er

$$9.66125950352392237618914805352687... \cdot 10^{-8}.$$

Nøyaktigheten er rundt 16 siffers nøyaktighet.

Delsummen $S_6(1/2)$ er en brøk hvor nevneren er på formen en potens av 10 ganget med 9

$$S_6(1/2) = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{3 \cdot 2^7} - \frac{1}{5 \cdot 3^2 \cdot 2^{10}} = 0.8775824652777\ldots.$$

Alle resterende desimalen er 7 (husk at $1/9 = 0.11111\ldots$).

Vi legger sammen tallene:

$$0.8775824 + 6.527777777777777 \cdot 10^{-8} + 9.661259493833851 \cdot 10^{-8}$$

$$= 0.8775825618903727161163$$

Her er det 22 desimaler med. Den alternerende summen som vi regnet ut i matlab besto av få og avtagende ledd så det er ingen grunn til å tro at det er en feil her som kan ha forplantet seg hel til 20 desimal. Men det viser det seg alts[at det er! Nøyaktigheten til utregningen ovenfor er bare til 16 siffer. Den er altså ikke noe bedre enn om vi bare hadde funnes $\cos(1/2)$ på vanlig måte.

9

Her er en oppgave for de som ønsker å forstå restleddet til Taylor polynomene.

Eg gir ikke noe mer løsningsforslag her enn det som er gitt som hint i oppgaveteksten.

Anta at $f(x)$ er glatt (uendelig mange ganger deriverbar).

a) La a være en gitt verdi. Benytt skjæringssetningen og ekstremalverdisetningen til å konkludere med at det finnes tall m og M slik at $g^{(N)}(x)$ ligger mellom m og M for alle x mellom 0 og a, og videre at alle verdier mellom m og M er lik $g^{(N)}(c)$ hvor c er et tall mellom 0 og a (eller lik en av dem).

b) Vis ved N gjentatte integralestimater at en funksjon g slik at $g^{(n)}(0) = 0$ for $n < N$ har egenskapen at

$$mx^{N+1}/(N+1)! \leq g(x) \leq Mx^{N+1}/(N+1)!$$

for x mellom 0 og a, når $a > 0$ eller N er et partall og

$$Mx^{N+1}/(N+1)! \leq g(x) \leq mx^{N+1}/(N+1)!$$

for x mellom 0 og a, når $a < 0$ og N er et oddetall.

c) Sjekk at restleddet $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ har egenskapen i b) og benytt resultatet sammen med skjæringssetningen til å konkludere med at det for hver x finnes en c mellom 0 og x slik at restleddet $R_n(x)$ er lik $f^{(N+1)}(c)x^{n+1}/(n+1)!$.