10.april 2014

3.3 Cramers regel. (fortsetter fra sist gang)

① A $n \times n$ matrise. Anta $\det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)$$

$$\operatorname{adj}(A) = C^T$$

adjungerte cofaktor (matrisen til A)

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det \left[\cdots \right]$$

fjerner rad i og kolonne j fra A.

Eks
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Invers matrisen til $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 2 & d \end{bmatrix}$ er

$$\frac{1}{ad-2} \begin{bmatrix} d & -1 \\ -2 & a \end{bmatrix}.$$

<u>Cramers regel</u>
$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \vec{b}$$

A $n \times n$ matrise. $A = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]$

La $A_i(\vec{b}) = [\vec{a}_1, \ldots \vec{b}, \ldots a_n]$

byttet ut søyle nr. i $(\vec{a}_i)$ med $\vec{b}$

Resultat: $\boxed{X_i = \dfrac{\det A_i(\vec{b})}{\det(A)}}$.

2

Cramers regel (og formelen for A^{-1}) brukes helst i tilfeller hvor matrisen A ikke bare består av tall, men også parametre.

Hva er løsningen til y i likningssystemet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b^2 & 0 \\ c & b & 2 \\ b & 0 & a^2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

(kofaktor ekspansjon med 3. søyle)

$$\det A = (-1)^{2+3} \cdot 2 \begin{vmatrix} a & b^2 \\ b & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} a^2 \begin{vmatrix} a & b^2 \\ c & b \end{vmatrix}$$

$$= -2(-b^3) + a^2(a \cdot b - c \cdot b^2)$$

$$= 2b^3 + a^3 b - a^2 b^2 c$$

$$\det(A_2(b)) = \det \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ c & 1 & 2 \\ b & -1 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} a & 2 \\ b & -1 \end{vmatrix} + a^2 \begin{vmatrix} a & 2 \\ c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-a - 2b) + a^2(a - 2c) = 2a + 4b + a^3 - 2a^2 c$$

$$y = \frac{2a + 4b + a^3 - 2a^2 c}{2b^3 + a^3 b - a^2 b^2 c}$$ ved Cramers regel.

(når nevneren er ulik 0)

③ Løs likningssystemet

$$sx + y = s + t$$
$$tx + s^2 y = 1$$

i variablene x og y

s og t er parametre.

$$\begin{bmatrix} s & 1 \\ t & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 1 \\ t & s^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s+t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^3 - t} \begin{bmatrix} s^2 & -1 \\ -t & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^3 - t} \begin{bmatrix} s^3 + s^2 t - 1 \\ -st - t^2 + s \end{bmatrix}$$

når $s^3 \neq t$.

Repetisjon

Komplekse tall

Gjennomgang i pausen

$z = x + i \cdot y$ x, y reelle tall

$i^2 = -1$

4 $\bar{z} = x - iy$

i er bestemt opp til fortegn av denne egenskapen.

Noen skriver $\sqrt{-1}$ for i.

$$(2-i) + (3+2i) = (2+3) + i(-1+2) = 5 + 1 \cdot i = 5 + i.$$

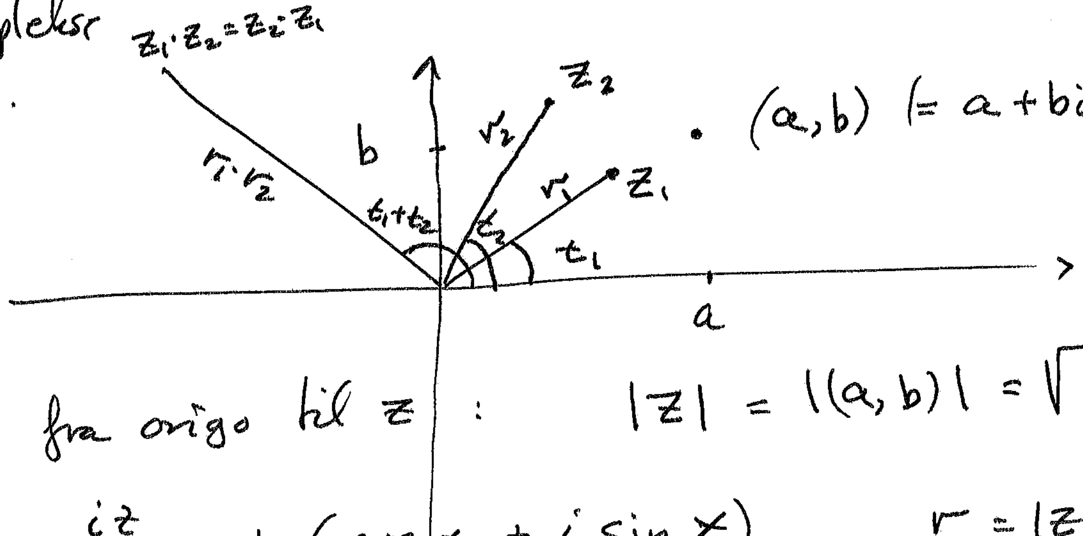
$$(2-i)(3+2i) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2i + (-i) \cdot 3 + (-i) \cdot 2i$$

$$= 6 + 4i - 3i + 2(-1)(\underbrace{i^2}_{=-1})$$

$$= 6 - 2(-1) + (4-3)i$$

$$= \underline{\underline{8+i}}$$

Det komplekse planet.



$\cdot\ (a, b)\ (= a + bi)$

Avstand fra origo til z: $|z| = |(a,b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$z = r e^{it} = r(\cos t + i \sin t)$ $r = |z|$

Eulers formel. $(t = \mathrm{Arg}\, z)$

$$\underbrace{r_1 e^{it_1}}_{z_1} \cdot \underbrace{r_2 e^{it_2}}_{z_2} = \underbrace{r_1 \cdot r_2 e^{i(t_1+t_2)}}_{z_1 \cdot z_2}$$

5

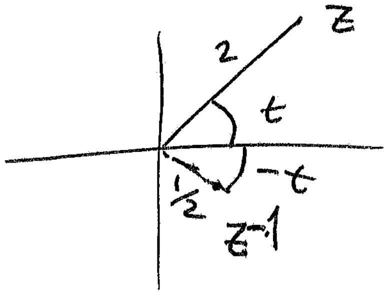
$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Vinkelen med den positive reell akse til $z_1 \cdot z_2$ er summen av vinklene til z_1 og z_2 med den positive reelle akse (opp til $2\pi \cdot n$)

Alle komplekse tall $\neq 0$ har en mult invers

$$z = re^{it}.$$

$$z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-it}$$



<u>Resultat</u> De komplekse tall er <u>algebraisk lukke</u>

d.v.s Alle polynomer over de komplekse tall kan faktoriseres som et produkt av lineære faktorer

$$p(z) = a(z - r_1) \cdots (z - r_2)$$

eks. $z^2 + 1 = (z+i)(z-i).$

(6) Komplekse tall kan uttrykkes ved matriser.

$$i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left(\text{også} \quad (-i)^2 = (-1)\mathbb{1}_2 \right)$$

$$i^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a + bi = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Komplekse tall $\longleftrightarrow$ matrisene på forma

$$(a, b) = a + ib \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$+ \longleftrightarrow +$$

$$\times \longleftrightarrow \times$$

$$1 \longleftrightarrow \mathbb{1}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

kompleks konjugering $\longleftrightarrow$ transponering

7

separabel diff likninger (repetisjon)

$$f(x) \cdot g(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$g(t) = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$\int \cdots dt$ integrerer begge sider

$$\int g(t)\,dt = \int \frac{1}{f(x)} \underbrace{\frac{dx}{dt}\,dt}$$

$$= \int \frac{1}{f(x)}\,dx \quad \text{(ved substitusjon)}$$

$$\int g(t)\,dt = \int \frac{1}{f(x)}\,dx$$

$$x' = \underbrace{-2x}_{\text{funksjon av } x} \cdot \underbrace{1}_{\text{funksjon av } t}$$

$$\frac{1}{-2x}\,dx = 1\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx = \int 1\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\ln|x| = t + c$$

$$\ln|x| = -2t + c_1$$

$$|x| = e^{-2t} \cdot e^{c}$$

$$x = e^{c} \cdot e^{-2t} \quad \text{eller } -e^{c} \cdot e^{-2t}$$

$$x(t) = k \cdot e^{-2t} \quad k \text{ reell konstant}$$

($x(t) \equiv 0$ er også en løsning.)

(8) 5.7 System av lineære differensial likninger

$$\frac{d\,X(t)}{dt} = X'(t) = -2\,X(t)$$

Løsningene er $X(t) = k \cdot e^{-2t}$

k et reelt tall.

$X(t)$ bestemmes entydig hvis vi spesifiserer verdien for en gitt t. (Initalbetingelse / Randbetingelse)

For eksempel. $X(0) = 3$ initialbetingelse

$$k \cdot e^{-2\cdot 0} = k = 3 \quad \text{så}$$

$$X(t) = \underline{3 \cdot e^{-2t}}$$

$$\frac{dx}{dt} = X'(t) = i\,X(t) \qquad i^2 = -1$$

$$X(t) = k\,e^{it} \underset{\text{Eulers formel}}{=} k(\cos t + i \sin t)$$

System av diff likninger

9

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = x_1'$$

$$a_{21} x_2 + a_{22} x_2 = x_2'$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Hvis $a_{12} = a_{21} = 0$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$

$$a_{11} x_1 = x_1' \qquad x_1 = k_1 e^{a_{11} t}$$

$$a_{22} x_2 = x_2' \qquad x_2 = k_2 e^{a_{22} t}.$$

—

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

$$x_1' = x_2 \qquad x_1'' = x_2' = x_1$$

$$x_2' = x_1 \qquad x_2'' = x_2$$

$$x_1 = k_1 e^{t} + k_2 e^{-t} \quad (= c_1 \cosh(t) + c_2 \sinh(t))$$

$$x_2 = x_1' = k_1 e^{t} - k_2 e^{-t}.$$

—

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1' = x_2 \qquad x_1'' = -x_1$$

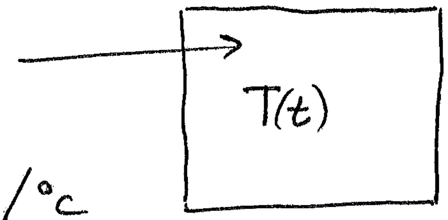
$$x_2' = -x_1 \qquad x_2'' = -x_2$$

$$x_1 = k_1 \cos t + k_2 \sin t \quad (c_1 e^{it} + c_2 e^{-it})$$

Praktisk eksempel

Varmetap til et ettromsbygg.
Temperaturutvikling med tiden.
T_{ute} temperatur ute
konstant

Varme-
kapasitet
$K = 10^6 J/°C$



Varmeledning $L = 50 W/°C$

10

$$K \frac{dT}{dt} = -L(T - T_{ute})$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{L}{K}(T - T_{ute}).$$

$$\frac{d}{dt} T_{ute} = 0 \qquad T_{ute} \text{ er konstant}$$

$$\frac{d}{dt}(T - T_{ute}) = -\frac{L}{K}(T - T_{ute})$$

$$T - T_{ute} = c \cdot e^{-\frac{L}{K}t}$$

$$T = T_{ute} + c e^{-\frac{L}{K}t}$$

Anta $T_{ute} = 3°C$ $\qquad T(0) = 20°C$

$$T(0) = 20°C = 3°C + c e^0 = 3°C + c$$

$$c = 17°C$$

$$\underline{T(t) = 3°C + 17°C\, e^{-\frac{L}{K}t}} = \underline{3°C + 17°C\, e^{-0.18t}}$$

$$\frac{L}{K} = \frac{50 W/°C}{10^6 J/°C} = \frac{50}{10^6} \frac{W}{J} = \frac{50}{10^6} \frac{Js^{-1}}{J} = \frac{50}{10^6} s^{-1}$$

$1h = 3600s$, $\quad s^{-1} = 3600\, h^{-1}$

$$= \frac{50 \cdot 3600}{10^6} h^{-1}$$

$$= \underline{0.18\, h^{-1}}$$

Generell fremgangsmåte

11

$$A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}.$$

Anta A kan diagonaliseres

$$A = PDP^{-1} \qquad D = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{bmatrix}.$$

$$(AP = P\cdot D)$$

$$PDP^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

La $\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\end{bmatrix}$

$$DP^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = P^{-1}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \frac{d}{dt}P^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$D\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1\bar{x}_1 = \bar{x}_1' \quad \text{og} \quad \lambda_2\bar{x}_2 = \bar{x}_2'$$

$$\bar{x}_1 = k_1\cdot e^{\lambda_1 t} \qquad \bar{x}_2 = k_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}k_1 e^{\lambda_1 t}\\k_2 e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}$$

Eks $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

Løs diff. likningene $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

12

$$-4x_1 - 3x_2 = x_1'$$
$$3x_1 - 4x_2 = x_2'$$

Diagonalisere A:

$$\det(A - \lambda 1_2) = \det \begin{bmatrix} -4-\lambda & -3 \\ 3 & -4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (4+\lambda)^2 + 3^2 = 0$$ karakteristisk likning.

$(4+\lambda)^2 = -3^2$ så $4+\lambda = \pm 3 \cdot i$

Egenverdiene er $\lambda = \underline{-4 \pm 3i}$.

$\lambda_1 = -4+3i$: $\begin{bmatrix} -4-(-4+3i) & -3 \\ 3 & -4-(-4+3i) \end{bmatrix} \vec{V} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{bmatrix} \vec{V} = \vec{0}.$$

$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -4-3i = \bar{\lambda}_1$ kompleks konjugert $\vec{V}_2 = \overline{\vec{V}_1} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ (hvorfor?)

$D = \begin{bmatrix} -4+3i & 0 \\ 0 & -4-3i \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(13)

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e^{(-4+3i)t} \\ k_2 e^{(-4-3i)t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 e^{(-4+3i)t} \\ k_2 e^{(-4-3i)t} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = (k_1 \cdot i) e^{(-4+3i)t} - k_2 \cdot i \, e^{(-4-3i)t}$$

$$x_2 = k_1 e^{(-4+3i)t} + k_2 e^{(-4-3i)t}$$

$$e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$$

$$x_1 = i \left[k_1 e^{-4t} (\cos(3t) + i \sin(3t)) - k_2 e^{-4t} (\cos(3t) - i \sin(3t)) \right]$$

hvis $k_1 = k_2$, da er $x_1 = -2k_1 e^{-4t} \sin(3t)$

$$x_2 = 2k_1 e^{-4t} \cos(3t).$$